

Guía número 1 Matemática

III° Medio

Nombre de alumno/a: Curso:

Asignatura: **Matemática.** Nivel: **Tercero medio.**

Unidad: Números y función cuadrática. Contenido: Raíces, logaritmos y función cuadrática.

OA2: Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos.

OA 3: Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$

Transformación de Potencia a Raíz

Primero, recordemos el cálculo de una raíz:

➤ $\sqrt{25} = 5$

➤ $\sqrt[3]{8} = 2$

➤ $\sqrt[5]{1} = 1$

➤ $\sqrt[3]{27} =$

➤ $\sqrt{81} =$

➤ $\sqrt[4]{16} =$

➤ $\sqrt[3]{1} =$

➤ $\sqrt{36} =$

- ❖ Toda potencia que posee un exponente fraccionario o decimal, se puede transformar en una raíz, de la siguiente forma.

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} \longrightarrow \text{Ejemplo1: } 7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} \longrightarrow \sqrt[3]{49}$$

$$\text{Ejemplo2: } 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3} \longrightarrow \sqrt{125}$$

Ahora, toda raíz se puede transformar en una potencia, en donde su exponente será un número fraccionario o decimal.

$$\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}} \longrightarrow \text{Por ejemplo: } \sqrt[7]{8^2} = 8^{\frac{2}{7}}$$

Ejercicios:

1. Transformar a raíz las siguientes potencias (en caso de tener raíz exacta, calcular).

i. $5^{\frac{3}{2}} =$ _____

ii. $6^{\frac{7}{2}} =$ _____

iii. $2^{\frac{1}{4}} =$ _____

iv. $4^{\frac{2}{3}} =$ _____

v. $8^{\frac{1}{3}} =$ _____

vi. $2^{\frac{2}{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$

vii. $49^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Transformar a potencia las siguientes raíces.

i. $\sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

ii. $\sqrt[3]{15} = \underline{\hspace{2cm}}$

iii. $\sqrt[7]{6^5} = \underline{\hspace{2cm}}$

iv. $\sqrt{10^4} = \underline{\hspace{2cm}}$

v. $\sqrt[5]{12^6} = \underline{\hspace{2cm}}$

vi. $\sqrt[6]{15^7} = \underline{\hspace{2cm}}$

vii. $\sqrt[5]{3^{15}} = \underline{\hspace{2cm}}$

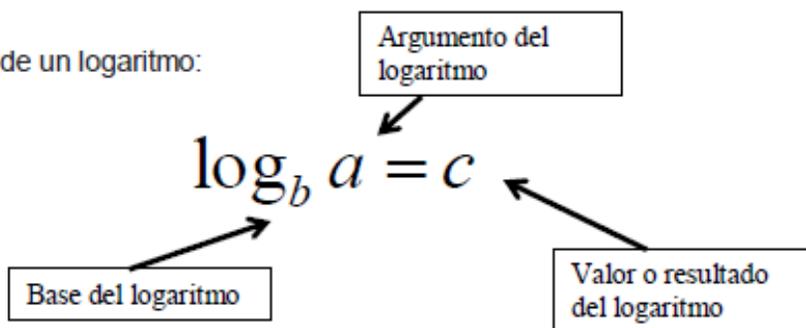
Transformación

de potencia a logaritmo y de logaritmo a potencia.

Los logaritmos conocidos también como anti-potencias son unas de las funciones más utilizadas en matemáticas y otras ciencias.

Esta función está directamente relacionada con todas las potencias, tanto de exponente entero como racional (fraccionario).

Elementos de un logaritmo:



Se lee \longrightarrow Logaritmo en base b de a es igual a c

Por ejemplo:

$$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

1) $\log_3 9 = 2$ expresado como potencia $3^2 = 9$

2) $\log_5 125 = 3$ expresado como potencia $5^3 = 125$

Actividades:

1. Expresar como potencia los siguientes logaritmos.

I. $\log_2 4 = 2$

II. $\log_3 27 = 3$

III. $\log_5 25 = 2$

IV. $\log_4 32 = 3$

V. $\log_2 32 = 5$

2. Identificar el valor faltante en los siguientes logaritmos.

I. $\log_2 \quad = 3$

II. $\log_9 \quad = 2$

III. $\log 100 = 2$

IV. $\log_7 49 = \underline{\quad}$

V. $\log \quad 216 = 3$

3. Expresar como logaritmos las siguientes potencias.

$$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

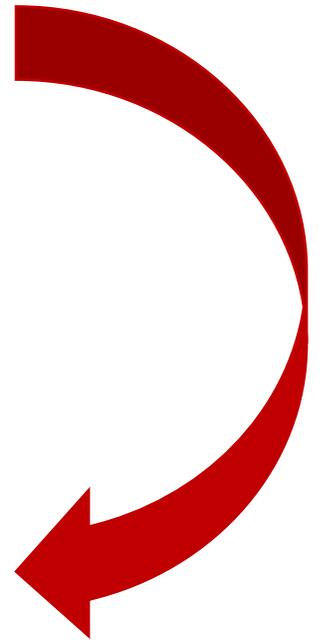
I. $10^3 = 1000 \longrightarrow$

II. $4^3 = 64 \longrightarrow$

III. $3^4 = \underline{\quad} \longrightarrow$

IV. $1^7 = \underline{\quad} \longrightarrow$

V. $2^5 = \underline{\quad} \longrightarrow$



Propiedades de los logaritmos

De la definición de logaritmo podemos decir que:

- No existe el logaritmo con base negativa. $\nexists \log_{-a} x$
 - No existe el logaritmo de un número negativo. $\nexists \log_a (-x)$
 - No existe el logaritmo de cero. $\nexists \log_a 0$
 - El logaritmo de 1 es cero. $\log_a 1 = 0$
 - El logaritmo en base a de a es uno. $\log_a a = 1$
- Logaritmo de un producto:

El logaritmo de un producto de factores es la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Ejemplo: $\log_5(5 \cdot 4) \longrightarrow \log_5 5 + \log_5 4 \longrightarrow 1 + \log_5 4$

- Logaritmo de un cociente:

El logaritmo de un cociente es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Ejemplo: $\log_6\left(\frac{13}{6}\right) \longrightarrow \log_6 13 - \log_6 6 \longrightarrow \log_6 13 - 1$

- Logaritmo de una potencia:

El logaritmo de una potencia es el logaritmo de la base de la potencia multiplicado por el exponente.

$$\log(a^b) = b \cdot \log(a)$$

Ejemplo: $\log_3 27 \longrightarrow \log_3 3^3 \longrightarrow 3 \cdot \log_3 3$

Ejercicios. Utilizar las propiedades del logaritmo:

- I. $\log_7(7 \cdot 5) =$
- II. $\log_4(6 \cdot 3) =$
- III. $\log_9\left(\frac{7}{9}\right) =$
- IV. $\log_{15}\left(\frac{6}{11}\right) =$
- V. $\log_8 8^5 =$
- VI. $\log_2 16 =$
- VII. $\log_3 27 =$

Función cuadrática.

Una función cuadrática es aquella que puede escribirse como una ecuación de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a y b son términos dependientes y c es el término independiente. Importante destacar que $a \neq 0$.

ax² es el término cuadrático

bx es el término lineal

c es el término independiente

Si la ecuación tiene todos los términos se dice que es una ecuación completa, si a la ecuación le falta el término lineal o el independiente se dice que la ecuación es incompleta.

Por ejemplo:

$f(x) = 5x^2 + 8x - 4$ —————> Completa; tiene los 3 términos.

Coeficientes $a \cong 5$ $b \cong 8$ $c = -4$

$f(x) = 4x^2 - 6x$ —————> Incompleta; tiene 2 términos.

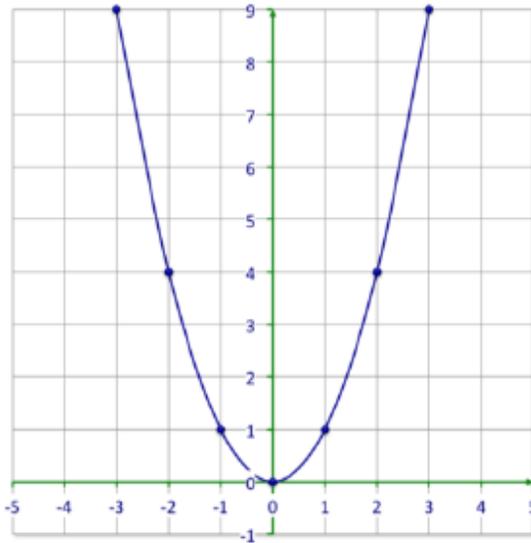
Coeficientes $a \cong 4$ $b = -6$ $c = 0$

$f(x) = -6x^2 + 7$ —————> Incompleta; tiene 2 términos.

Coeficientes $a \cong -6$ $b = 0$ $c \cong 7$

- Representación gráfica de una función cuadrática:

Si pudiésemos representar en una gráfica "todos" los puntos $[x, f(x)]$ de una función cuadrática, obtendríamos siempre una curva llamada parábola.



Dicha parábola tendrá algunas características o elementos bien definidos dependiendo de los valores de la ecuación que la generan. Estas características o elementos son:

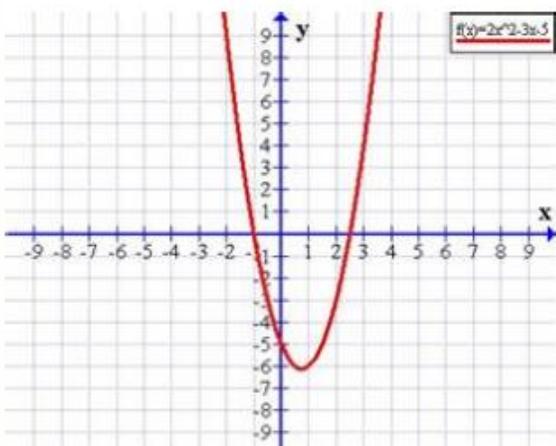
- Orientación o concavidad (hacia arriba o hacia abajo de las ramas o brazos)
- Puntos de corte con el eje "x" de abscisas (también llamadas raíces)
- Punto de corte con el eje "y" de ordenadas
- Eje de simetría
- Vértice

- Orientación o concavidad

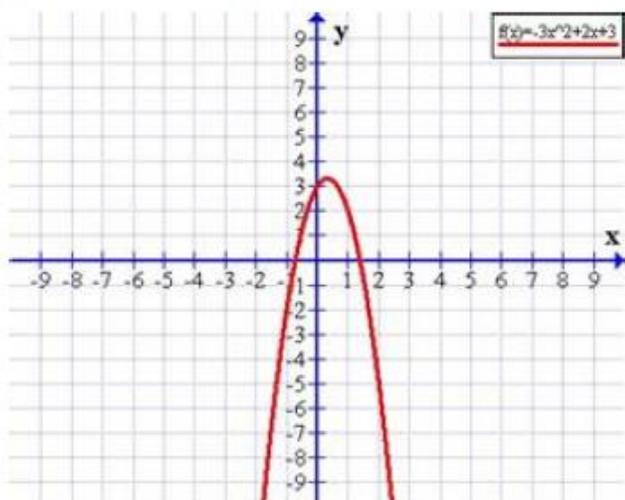
Una primera característica es la **orientación** o **concavidad** de la parábola. Hablamos de **parábola cóncava** si sus ramas o brazos se orientan hacia arriba y hablamos de **parábola convexa** si sus ramas o brazos se orientan hacia abajo.

Esta distinta orientación está definida por el valor (el signo) que tenga el término cuadrático (la ax^2):

Si $a > 0$ (positivo) la parábola es cóncava o con puntas hacia arriba, como en $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$



Si $a < 0$ (negativo) la parábola es convexa o con puntas hacia abajo, como en $f(x) = -3x^2 + 2x + 3$



Puntos de cortes con el eje x (soluciones)

Puntos de corte en el eje de las abscisas (Raíces o soluciones)

(eje de las X)

Otra característica o elemento fundamental para graficar una función cuadrática la da el valor o los valores que adquiera x , los cuales deben calcularse.

Ahora, para calcular las raíces (soluciones) de cualquier función cuadrática calculamos

$f(x) = 0$. Esto significa que las raíces (soluciones) de una función cuadrática son aquellos **valores de x** para los cuales la expresión vale 0; es decir, los **valores de x tales que $y = 0$** ; que es lo mismo que $f(x) = 0$.

Entonces hacemos

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Como la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ posee un término de segundo grado, otro de primer grado y un término constante, no podemos aplicar las propiedades de las ecuaciones, entonces, para resolverla usamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces, las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática nos indican los puntos de intersección de la parábola con el **eje de las X (abscisas)**.

Respecto a esta intersección, se pueden dar tres casos:

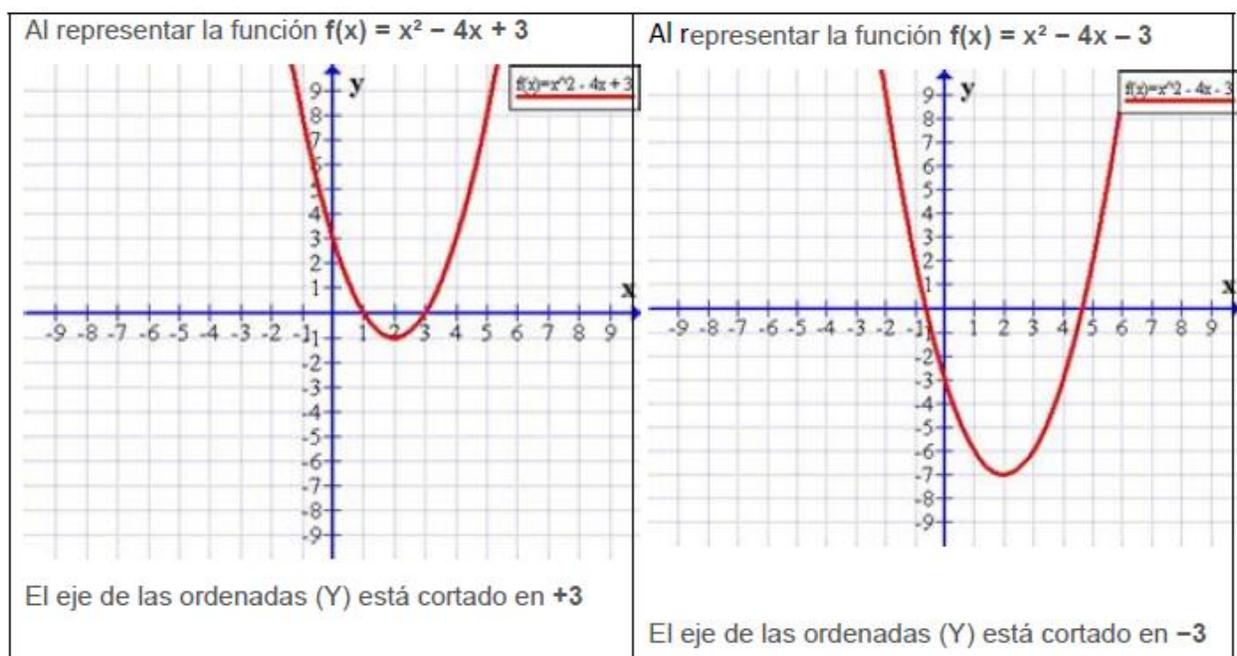
- Que corte al eje X en dos puntos distintos
- Que corte al eje X en un solo punto (es tangente al eje x)
- Que no corte al eje X

Esta característica se puede determinar analizando el **discriminante**.

Punto de corte con el eje y

En el eje de ordenadas (Y) la primera coordenada es **cero**, por lo que el punto de corte en el eje de las ordenadas lo marca el valor de c (0, c).

Veamos:



Por ejemplo: ¿En qué punto corta el eje "Y" la función $f(x) = x^2 + 3x - 10$?

$$f(x) = x^2 + 3x - 10 \text{ primero hacemos } x=0 \text{ resultando}$$

$$f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 10$$

$$f(0) = -10 \text{ por lo tanto la parábola corta el eje "Y" en el punto } (0, -10)$$

Vértice

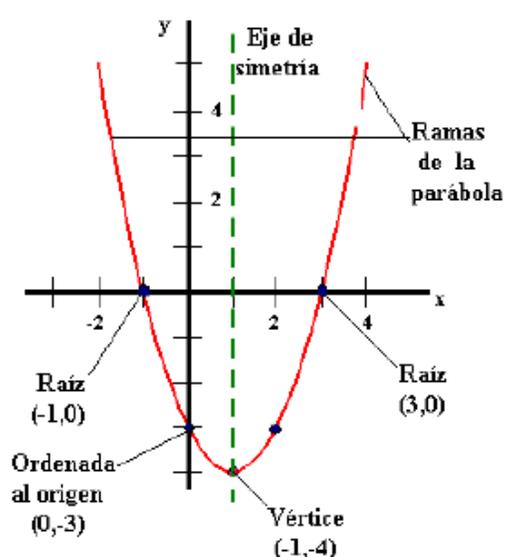
El **vértice** de la parábola es el punto de valor máximo o mínimo de una parábola, esto dependerá de la concavidad e esta y tiene como coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

La abscisa "X" de este punto corresponde al valor del eje de simetría $\left(-\frac{b}{2a} \right)$

y la ordenada "Y", $\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$

Observemos la siguiente imagen



La grafica nos indica que la parábola es cóncava hacia arriba además:

- Corta el eje "X" en los puntos (-1,0) y (3,0)
- Corta el eje "Y" en el punto (0,-3)
- El vértice tiene coordenadas (1,-4)

Puntos de cortes con el x

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Calcular los cortes con el eje x de la siguiente función.

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3}}{2 \cdot 1}$	$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3}}{2 \cdot 1}$
$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 + 12}}{2}$	$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{4 + 12}}{2}$
$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2}$	$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2}$
$x_1 = \frac{-2 + 4}{2}$	$x_2 = \frac{-2 - 4}{2}$
$x_1 = \frac{2}{2}$	$x_2 = \frac{-6}{2}$
$x_1 = 1$	$x_2 = -3$

Actividades:

I. Determinar los valores de a , b y c de las siguientes funciones:

$f(x) = 8x^2 + 4x + 1$	a=	b=	c=
$f(x) = x^2 - 5x + 41$	a=	b=	c=
$f(x) = -4x^2 - 3x$	a=	b=	c=
$f(x) = -x^2 + 7$	a=	b=	c=
$f(x) = 6x^2 + 3x$	a=	b=	c=
$f(x) = 4x^2 + 5x - 17$	a=	b=	c=

II. Usando fórmula general calcular el corte con el eje x de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

2) $f(x) = x^2 + 5x - 2$

3) $f(x) = -2x^2 + x + 4$

4) $f(x) = x^2 + 3x - 10$

5) $f(x) = x^2 + x - 6$

III. Determinar el corte con el eje y de las siguientes funciones:

Función	Corte con el eje y
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	
$f(x) = -x^2 + 17$	
$f(x) = x^2 + 6x - 14$	
$f(x) = 10x^2 - x$	

IV. Calcular el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

1) $f(x) = x^2 + 5x + 2$

2) $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$

3) $f(x) = 4x^2 + x + 2$

4) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

V. Determinar que tipo de concavidad tienen las siguientes funciones cuadráticas. Cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

$f(x) = -x^2 - 4x + 3$	
$f(x) = -x^2 + x - 3$	
$f(x) = x^2 - 4x + 7$	
$f(x) = x^2 + 4x + 3$	
$f(x) = 5x^2 + 8x + 15$	
$f(x) = -9x^2 + 7x - 10$	

