<u>Guía N°2 Matemática</u>
I° Medio

Nombre: _______________________________________ Curso: ____________ Fecha: ___________

Asignatura: Matemática
Unidad III. Geometría

- OA 12: Explicar de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con software educativo.

Unidad IV. Estadística y probabilidades

- OA 15: Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles u cuartiles.

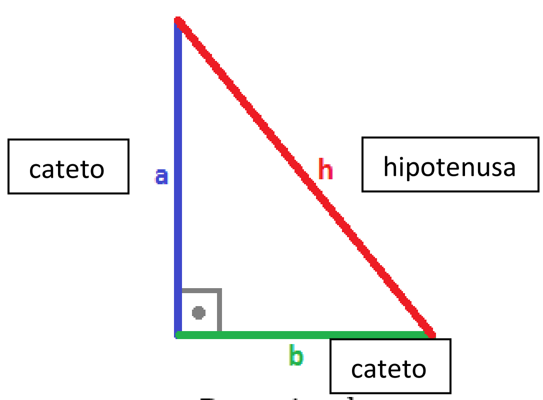
Unidad I. Números y operaciones

- OA 2: Utilizar las operaciones de multiplicación y división con los números racionales en el contexto de la resolución de problemas.
- OA 5: Resolver problemas que involucran variaciones porcentuales en contextos diversos, usando representaciones pictóricas y registrando el proceso de manera simbólica; por ejemplo: el interés anual de ahorro.

GEOMETRÍA: TEOREMA DE PITÁGORAS

Dado un triángulo rectángulo de catetos (lados) *a* y *b* e hipotenusa *h* (lado opuesto al ángulo recto "90°"). Entonces,

$$\boxed{h^2 = a^2 + b^2}$$



Despejando,

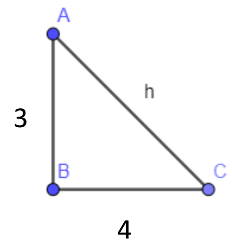
$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

Recordemos que:

- el triángulo es **rectángulo** porque tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90°.
- la **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto.
- *h* siempre es mayor que los dos catetos, es decir, $h > a$ y $h > b$

Ejemplo:

1.- Calcular el valor de la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo.



Como tenemos los valores de los dos catetos, buscaremos el valor de h (hipotenusa), de la siguiente forma:

Tenemos nuestra fórmula $\boldsymbol{h^2 = a^2 + b^2}$

- Reconocer los valores de los catetos que en este caso son $a = 4$ y $b = 5$.
- Reemplazamos estos valores en la fórmula

$$h^2 = 3^2 + 4^2$$

- Desarrollar la igualdad $\quad h^2 = 9 + 16$

$$h^2 = 25$$

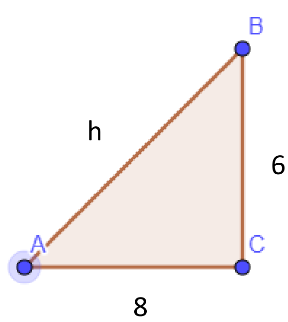
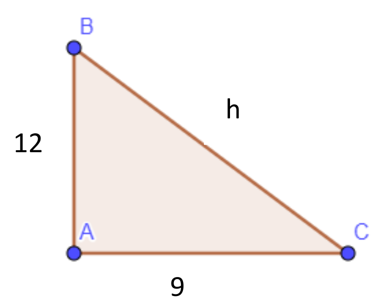
- Para eliminar el cuadrado de la hipotenusa debemos aplicar la raíz cuadrada.

$$h = \sqrt{25}$$
$$h = 5$$

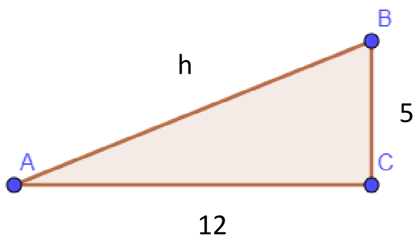
- Por lo tanto, el valor de la hipotenusa es 5

Aplicando el Teorema de Pitágoras, resolver los siguientes ejercicios:

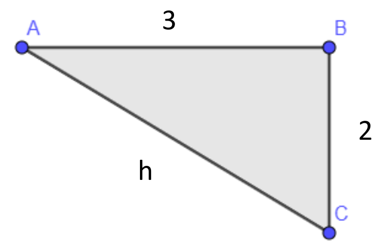
I. Calcular la hipotenusa (h) de los siguientes triángulos rectángulos:

a) 	b) 

c)

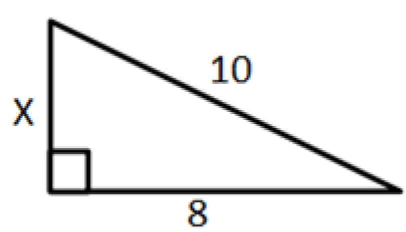


d)

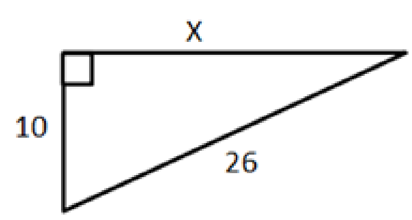


II. Calcular el valor del cateto o hipotenusa faltante de los siguientes triángulos rectángulos.

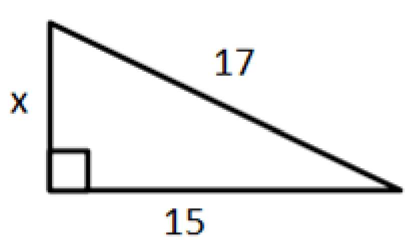
a)



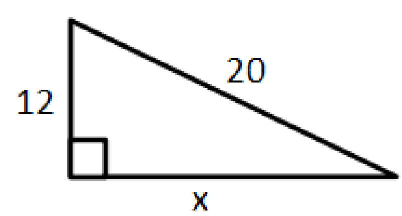
b)



c)

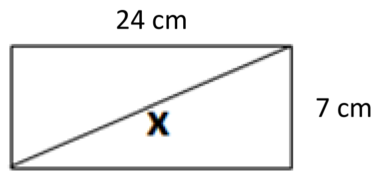


d)

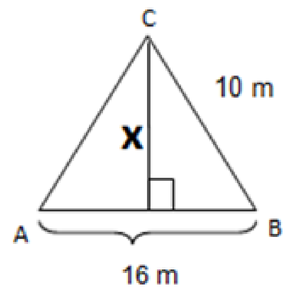


III. Calcula la incógnita de cada figura, según corresponda.

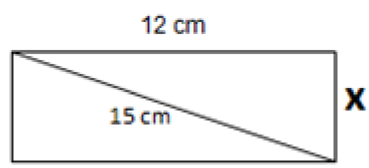
a)



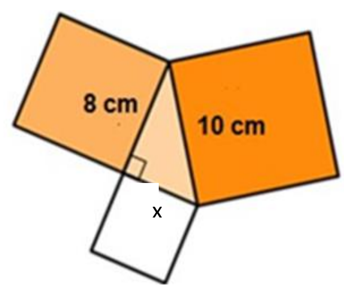
b) Considerar que el segmento $\overline{AB}$ está dividido en dos partes iguales.



c)

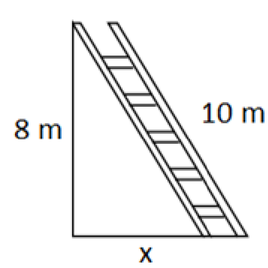


d)



e) Una cancha de fútbol mide 120 metros de largo. Si la longitud de sus diagonales es de 150 metros. ¿Cuál es el ancho del campo de juego?

f) ¿A qué distancia de la pared tendrá que colocar el pie de esta misma escalera para que la parte superior se apoye en la pared?



ESTADISTICA Y PROBABILIDAD: MEDIDAS DE POSICIÓN, PERCENTILES Y CUARTILES.

Para dar comienzo a este contenido, recordaremos cálculo de porcentajes, por ejemplo:

1) ¿Cuál es el 30% de 75?

$$30\%\ de\ 75 = \frac{30}{100} \cdot 75 = 0.3 \cdot 75 = 22.5$$

2) ¿Cuál es el 25% de 60?

$$25\%\ de\ 60 = \frac{25}{100} \cdot 60 = 0.25 \cdot 60 = 15$$

3) ¿Cuál es el 20% de 30?

$$20\%\ de\ 30 = \frac{20}{100} \cdot 30 = 0.2 \cdot 30 = 6$$

4) ¿Cuál es el 50% de 120?

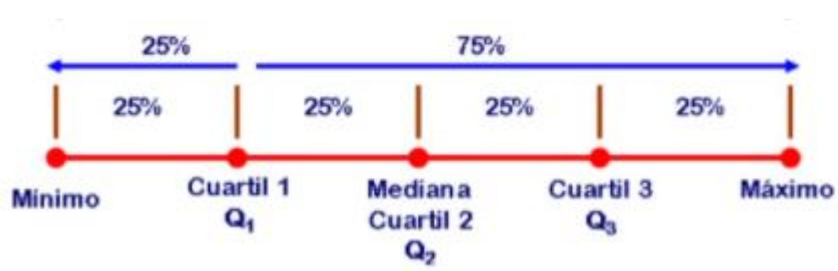
$$50\%\ de\ 120 = \frac{50}{100} \cdot 120 = 0.5 \cdot 120 = 60$$

Ejercicios: Calcula los siguientes porcentajes

1) ¿Cuál es el 10% de 120?	2) ¿Cuál es el 5% de 60?
3) ¿Cuál es 15% de 27?	4) ¿Cuál es el 90% de 200?

Cuartiles

Una de las medidas de posición son los **Cuartiles** ($Q_k, con\ k = 1, 2, 3\ ;\ \ Q_1, Q_2, Q_3$), que corresponden a tres valores que dividen una distribución de datos en *cuatro partes iguales.*



Para calcular trabajaremos con los siguientes ejemplos.

I. Sean los siguientes datos: 3, 5, 2, 7, 6, 4, 9 (número de datos impar)

1° Ordenar los datos de forma creciente (de menor a mayor): 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9

2° Calcular la mediana del grupo de datos, que, en este caso, corresponde al cuartil 2 (Q_2), dividiendo el total de datos en dos grupos.

> ¡¡Recordemos!!
>
> La **mediana** es el valor que ocupa el lugar central de todos los datos cuando éstos están ordenados de menor a mayor.

$$\boxed{2,\ 3,\ 4}\quad \underset{\downarrow \atop Mediana,\ Q_2}{5}\quad \boxed{6,\ 7,\ 9}$$

3° Ahora, cada grupo dividirlo nuevamente en dos partes, es decir,

$$\underset{\downarrow \atop Q_1}{\boxed{2,\ \ 3,\ \ 4}}\qquad \underset{\downarrow \atop Mediana,\ Q_2}{5}\qquad \underset{\downarrow \atop Q_3}{\boxed{6,\ \ 7,\ \ 9}}$$

4° Finalmente, $Q_1 = 3$, $Q_2 = 5$, $Q_3 = 7$

II. Sean los siguientes datos: 8, 23, 56, 4, 6, 43, 53, 17 (número de datos par)

1° Ordenar los datos de forma creciente (de menor a mayor): 4, 6, 8, 17, 23, 43, 53, 56

2° Calcular la mediana del grupo de datos, que, en este caso, corresponde al cuartil 2 (Q_2), dividiendo el total de datos en dos grupos, como en el centro quedan dos datos, calculamos el promedio entre ellos

> ¡¡Recordemos!!
>
> El **promedio** ($\bar{X}$) se calcula sumando todos los datos y luego dividirlos por el número total de datos.
>
> $$\bar{x} = \frac{17+23}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$\boxed{4,\ 6,\ 8}\ \underset{\downarrow \atop Q_2 = 20}{\boxed{17,\ 23}}\ \boxed{43,\ 53,\ 56}$$

3° Ahora, cada grupo dividirlo nuevamente en dos partes, calculando el **promedio** entre ellos,

$$\underbrace{\boxed{4,\quad 6,\quad 8,\quad 17}}_{Q_1 = 7} \qquad \downarrow_{Q_2 = 20} \qquad \underbrace{\boxed{23,\quad 43,\quad 53,\quad 56}}_{Q_3 = 48}$$

4° Finalmente, $Q_1 = 7$, $Q_2 = 20$, $Q_3 = 48$

Ejercicios:

1. Calcular Q_1, Q_2, Q_3 de los siguientes datos 3, 5, 2, 7, 6, 4, 9, 1
2. Calcular Q_1, Q_2, Q_3 de los siguientes datos 3, 5, 2, 7, 6, 4, 9
3. Calcular Q_1, Q_2, Q_3 de los siguientes datos 0, 0, 1, 1, 2, 5, 11, 25, 40, 60

Percentiles

Es una medida de posición que asume 99 valores enumerados del 1 al 99 $(P_1, P_2, P_3, P_{4,\ldots,}P_{11,}P_{12}, \ldots, P_{15}, \ldots P_{50}, \ldots, P_{62}, \ldots, P_{75}, \ldots P_{84}, \ldots, P_{97}, P_{98}, P_{99})$ que dividen en 100 partes iguales un conjunto de datos ordenados de <u>menor a mayor</u>.

Por ejemplo,
El percentil 12 o P_{12} es el valor que acumula por debajo de él un 12% de valores iguales o inferiores a él.
El percentil 15 o P_{15}es el valor que acumula por debajo de él un 15% de valores iguales o inferiores a él.
En la posición central la ocupa el P_{50} que coincide con la mediana (Me) de los datos.

Para calcular trabajaremos con los siguientes ejemplos.

I. Sean los siguientes datos: 55, 52, 56, 64, 53, 61, 58, 50, 62 (número de datos impar), Calcular P_{20}, P_{50}, P_{80}

1° Calcular el total de datos: 9

2° Ordenar los datos de forma creciente (de menor a mayor): 50, 52, 53, 55, 56, 58, 61, 62, 64

2° Calcular la posición de los percentiles:

P_{20} significa que vamos a calcular el 20% del total de datos, en este caso de 9

$$P_{20} = 20\%\ de\ 9 = \frac{20}{100} \cdot 9 = 0.2 \cdot 9 = 1.8 = 2$$

Si resulta un número decimal, se considerará el siguiente número entero

Entonces, el P_{20} corresponde al dato número 2 cuando estos ya se encuentran ordenados.

P_{50} significa que vamos a calcular el 50% del total de datos, en este caso de 9

$$P_{50} = 50\%\ de\ 9 = \frac{50}{100} \cdot 9 = 0.5 \cdot 9 = 4.5 = 5$$

Entonces, el P_{50} corresponde al dato número 5 cuando estos ya se encuentran ordenados.

P_{80} significa que vamos a calcular el 80% del total de datos, en este caso de 9

$$P_{80} = 80\%\ de\ 9 = \frac{80}{100} \cdot 9 = 0.8 \cdot 9 = 7.2 = 8$$

Entonces, el P_{80} corresponde al dato número 8 cuando estos ya se encuentran ordenados.

4° Ubicamos los percentiles, de la siguiente forma:

50, 52, 53, 55, 56, 58, 61, 62, 64

52 ↓	56 ↓	62 ↓
Dato 2 P_{20}	Dato 5 P_{50}	Dato 8 P_{80}

Finalmente,

- El P_{20} se encuentra en el dato 2, lo que significa *"que el 20% de los datos son iguales o menores a 52"*
- El P_{50} se encuentra en el dato 5, lo que significa *"que el 50% de los datos son iguales o menores a 56"*
- El P_{80} se encuentra en el dato 8, lo que significa *"que el 80% de los datos son iguales o menores a 62"*

Ejercicios:

1) Calcular P_{12} y P_{92} de los siguientes datos: 100, 102, 103, 100, 106, 110, 100
2) Calcular P_{10} y P_{35} de los siguientes datos: 16, 15, 28, 20, 17, 9, 11, 24
3) Calcular P_{25}, P_{50} y P_{75} de los siguientes datos: 4, 23, 43, 8, 56, 53, 17, 6

NÚMEROS Y OPERACIONES: MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Los números que pertenecen al conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) son todos aquellos que se pueden escribir como una fracción cuyo numerador y denominador son número enteros y el denominador es distinto de cero. Es decir,

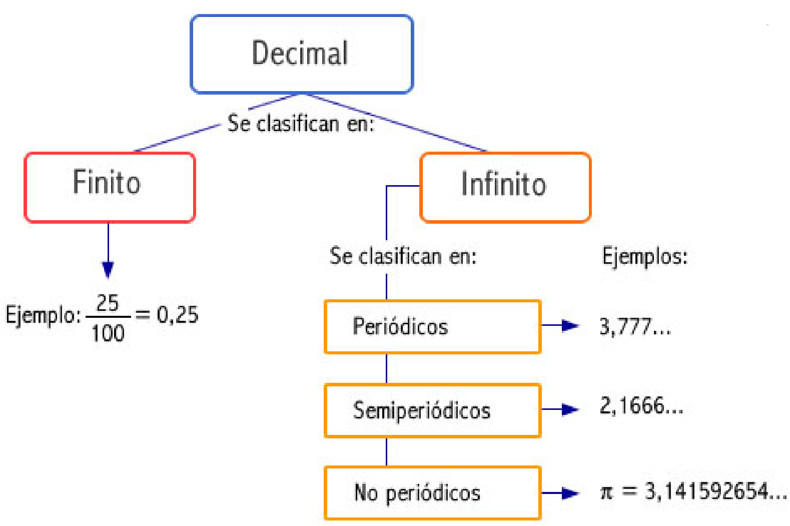
$$\left\{\frac{a}{b}\ tal\ que\ a,b \in \mathbb{Z}\ con\ b \neq 0\right\}$$

Por ejemplo: $\frac{1}{2}\ ,-0.1\ ,\ 2.\overline{3}\ ,-1.2\overline{5}\ ,\ 9\ ,-3$

Ejercicios: Anota si cada número pertenece (∈) al conjunto numérico, en caso contrario anota no pertenece (∉).

a. -5.8_____ $\mathbb{Q}$ b. 8_____ $\mathbb{Q}$ c. $\frac{2}{3}$ _____ $\mathbb{Q}$ d. $2.\overline{5}$ _____ $\mathbb{Q}$

Transformación de números decimales a fracción



Transformación de un decimal finito a fracción:

Se debe amplificar el número decimal por una potencia de 10 que tenga tantos ceros como cifras decimales.
Ejemplo:

$$0.6 = 0.6 \cdot \frac{10}{10} = \frac{0.6 \cdot 10}{1 \cdot 10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$-1.35 = -1.35 \cdot \frac{100}{100} = \frac{-1.35 \cdot 100}{1 \cdot 100} = \frac{-135}{100} = \frac{-27}{20}$$

I. Transforma los siguientes decimales finitos a fracción

a. 0.35=	b. 0.4=
c. -2.6=	d. 8.42=

Transformación de un decimal infinito periódico a fracción:

1° En el numerador escribe la diferencia (restar) entre el número decimal sin considerar la coma y el número que aparece en la parte entera.

2° En el denominador se escriben tantos 9 como cifras tenga el periodo.

Ejemplos:

$$0.\overline{8} = \frac{8-0}{9} = \frac{8}{9}$$

$$3.\overline{25} = \frac{325-3}{99} = \frac{322}{99}$$

II. Transforma los siguientes decimales infinitos periódicos a fracción

a. $3.\overline{2} =$	b. $5.\overline{01}$
c. $0.\overline{3} =$	d. $1.\overline{1} =$

Transformación de un decimal infinito semi periódico a fracción:

1° En el numerador escribe la diferencia (restar) entre el número decimal sin considerar la coma y el número que aparece antes del periodo.

2° En el denominador se escriben tantos 9 como cifras tenga el periodo y tantos ceros como cifras tenga el ante periodo.

Ejemplo:

$$0.1\overline{2} = \frac{12-1}{90} = \frac{11}{90} \qquad 12.34\overline{2} = \frac{12342-1234}{900} = \frac{11108}{900}$$

III. Transforma los siguientes decimales infinitos periódicos a fracción

a. $2.4\overline{1} =$	b. $5.1\overline{3} =$
c. $0.11\overline{2} =$	d. $10.1\overline{25} =$

Adición y sustracción de números racionales

$$\textbf{Adición}\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \textbf{Sustracción}\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

$$Donde\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}, con\ b,d \neq 0$$
$$(se\ lee\ a,b,c\ y\ d\ pertenecen\ al\ conjunto\ de\ los\ enteros\ con\ b\ y\ d\ distintos\ de\ cero)$$

Ejemplos:

Adición: $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$ $\quad debes\ multiplicar\ cruzado$

$\frac{1\cdot4+2\cdot3}{2\cdot4}=$ $\quad debes\ operar\ primero\ las\ multiplicaciones$

$\frac{4+6}{8}=$ $\quad debes\ operar\ la\ suma$

$\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ $\quad recuerda\ que\ es\ importante\ simplificar\ tus\ resultados$

Sustracción: $\frac{1}{5}-\frac{2}{3}=$ $\quad debes\ multiplicar\ cruzado$

$\frac{1\cdot3-5\cdot2}{5\cdot3}=$ $\quad debes\ operar\ primero\ las\ multiplicaciones$

$\frac{3-10}{15}=$ $\quad debes\ operar\ la\ resta, respetand\ siempre\ la\ regla\ de\ los\ signos$

$-\frac{7}{15}$

Resolver las siguientes operaciones:

a. $\frac{5}{3}+\frac{10}{3}=$	b. $\frac{12}{5}-\frac{4}{3}=$
c. $-\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=$	d. $\frac{7}{4}+5.5=$
e. $0.2-\frac{1}{2}=$	f. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+0.25+\frac{1}{5}=$

Multiplicación y división de números racionales

Multiplicación $\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad donde\ a,b,c,d\ \in\mathbb{Z}, con\ b,d\neq 0.$

Ejemplo: Para resolver la multiplicación de fracciones, se debe multiplicar hacia el lado, es decir, numerador con numerador y denominador con denominador (simplificar en caso de ser necesario).

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot3}{5\cdot7}=\frac{6}{35}$$

División $\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad donde\ a,b,c,d\ \in\mathbb{Z}, con\ b,d\neq 0.$

Ejemplo: Para resolver la división de fracciones, se debe multiplicar cruzado de la siguiente forma:

$\frac{3}{2}\div\frac{6}{5}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}\quad simplificamos\ por\ 3, recuerda\ que\ es\ dividir\ por\ 3\ en\ ambas\ partes.$

Resolver las siguientes operaciones:

a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} =$	b. $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} =$
c. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} =$	d. $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} =$
e. $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} =$	f. $\frac{6}{5} \cdot \frac{-2}{7} =$
g. $-\frac{12}{5} \cdot -\frac{7}{2} =$	h. $\frac{5}{9} \cdot -3 =$
i. $\frac{5}{2} \div \frac{7}{3} =$	j. $\frac{1}{5} \div \frac{11}{12} =$
k. $\frac{1}{7} \div \frac{-8}{3} =$	l. $\frac{8}{3} \div \frac{9}{2} =$
m. $-\frac{2}{5} \div -\frac{1}{6} =$	n. $(-0.\overline{3}) \cdot \left(-\frac{8}{13}\right) =$
o. $\frac{7}{36} \div (-5) + \frac{5}{4} =$	p. $\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \div \left(\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)\right) =$

<u>Variaciones Porcentuales</u>

- El $a\%$ de **descuento** en el valor de un producto equivale a cancelar el $(100 - \mathrm{a})\%$ del precio del producto.

- Un **aumento** del b% en el valor de un producto equivale a cancelar el $(100 + \mathrm{b})\ \%$ del precio del producto.

Ejemplos:

- 2600 aumentado en un 20%

$$\frac{2600}{100\%} = \frac{x}{120\%}$$

Porcentaje aumentado en un 20%

$$\frac{2600 \cdot 120\%}{100\%} = x$$

$$3120 = x$$

Al aumentar 2600 en un 20% nos queda en 3120

- 3500 disminuido en un 75%

$$\frac{3500}{100\%} = \frac{x}{25\%}$$

Porcentaje disminuido en un 75%

$$\frac{3500 \cdot 25\%}{100\%} = x$$

$$875 = x$$

Al disminuir 3500 en un 75% nos queda 875

Ejercicios: Calcula las siguientes variaciones porcentuales, usando proporciones.

a. 350 aumentado en 5%	b. 2 550 disminuido en un 25%
c. 13 250 aumentado en un 20 %	d. 8 000 aumentado en un 15 %.
e. 15 500 disminuido a un 60 %.	f. 25 000 disminuido en un 80%

Problemas de variaciones porcentuales

- Determinar cuánto han aumentado tus ingresos de un año a otro en porcentaje. Si durante el último año ganaste $350.000 y este año $380.000.

Paso 1: Restar 380.000 menos 350.000. El resultado es 30.000.

Paso 2. Dividir el resultado por el ingreso original

$$\frac{30.000}{350.000} = 0.0857$$

Paso 3. Multiplicar por 100, para obtener el resultado en porcentaje

$$0.0857 \cdot 100 = 8.57$$

Entonces, en un año ha aumentado el ingreso en un 8.57%.

- El siguiente aviso corresponde a una venta de libros por internet

¿Cuánto pago de IVA por cada libro que compre? (Considere que el IVA corresponde al 19%)

1. El IVA equivale al 19% del valor inicial fijado para un producto. Por lo tanto, el precio del libro equivale al 119% de su valor inicial.

2. Calculemos el valor del IVA que pagaremos por el libro

$$\frac{7500}{119\%} = \frac{x}{19\%}$$

Valor del IVA buscado

Porcentaje que realmente se paga por el libro

$$\frac{7500 \cdot 19\%}{119\%} = x$$

$$1.197 \approx x$$

Entonces, el valor del IVA que se le agrega a cada libro es de $1.197, por lo tanto, podemos también concluir que el libro tiene un precio original sin IVA de $6.303 aproximadamente.

Ejercicios:

1. Si una polera vale actualmente $7 500 y al momento de pagarla la rebajan en un 20%. ¿Cuánto es lo que debo pagar por la polera?
2. Un metro de tela me cuesta $ 1.500. ¿A cuánto tengo que venderlo para ganar el 20% de lo que costó?

3. Un arbusto mide 170 pero al podarlo puede disminuir su altura hasta un 5%, ¿cuánto podría llegar a medir la altura del arbusto?

4. El Kilo de naranjas costaba $ 4.000 ahora cuesta $3.600. Determinar en qué porcentaje disminuyó el precio del kilo de naranjas.