Enseñanza media

Guía N°2 Matemática, III°Medio.

Nombre de alumno/a: ……………………………………………………………………….. Curso: …………..…….

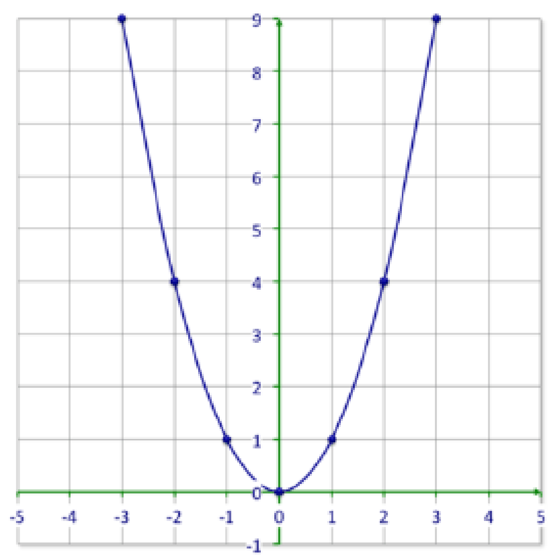
Unidad: Números y función cuadrática. Contenido: Raíces, logaritmos y función cuadrática.
OA 3. Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$
OA 8. Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

Función cuadrática.

Una función cuadrática es aquella que puede escribirse como una ecuación de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a y b son términos dependientes y c es el termino independiente. Importante destacar que a$\neq 0$.

- Representación gráfica de una función cuadrática:

Si pudiésemos representar en una gráfica "todos" los puntos [x,f(x)] de una función cuadrática , obtendríamos siempre una curva llamada parábola .



Dicha parábola tendrá algunas características o elementos bien definidos dependiendo de los valores de la ecuación que la generan. Estas características o elementos son:

-Orientación o concavidad (hacia arriba o hacia debajo de las ramas o brazos)

-Puntos de corte con el eje "x" de abscisas (también llamadas raíces)

-Punto de corte con el eje "y" de ordenadas

-Eje de simetría

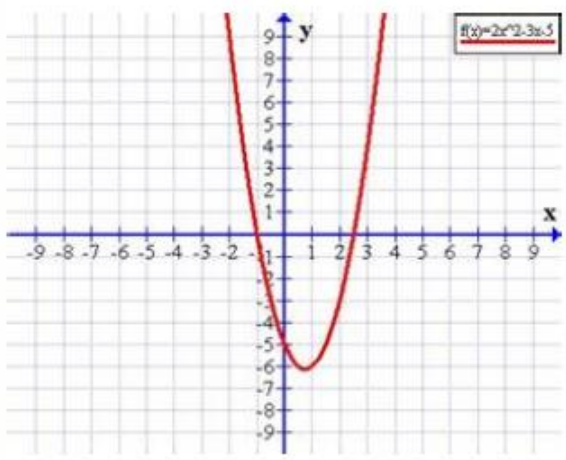
-Vértice

- **Orientación o concavidad**

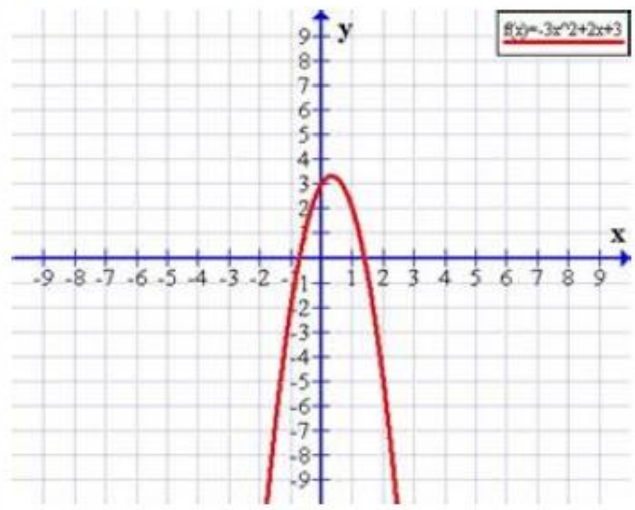
Una primera característica es la **orientación** o **concavidad** de la parábola. Hablamos de **parábola cóncava** si sus ramas o brazos se orientan hacia arriba y hablamos de **parábola convexa** si sus ramas o brazos se orientan hacia abajo.

Esta distinta orientación está definida por el valor (el signo) que tenga el término cuadrático **(la ax^2)** :

Si $a > 0$ (positivo) la parábola es cóncava o con puntas hacia arriba, como en $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$



Si $a < 0$ (negativo) la parábola es convexa o con puntas hacia abajo, como en $f(x) = -3x^2 + 2x + 3$



Actividad:

- Determinar qué tipo de concavidad tienen las siguientes funciones cuadráticas. Cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

$f(x) = -x^2 - 4x + 3$	
$f(x) = -x^2 + x - 3$	
$f(x) = x^2 - 4x + 7$	
$f(x) = x^2 + 4x + 3$	
$f(x) = 5x^2 + 8x + +15$	
$f(x) = -9x^2 + 7x - 10$	

COLEGIO FERNANDO DE ARAGÓN PUENTE ALTO

Puntos de corte en el eje de las abscisas (Raíces o soluciones) (eje de las X)

Otra característica o elemento fundamental para graficar una función cuadrática la da el valor o los valores que adquiera **x**, los cuales deben calcularse.

Ahora, para calcular las raíces (soluciones) de cualquier función cuadrática calculamos

f (x) = 0 . Esto significa que las raíces (soluciones) de una función cuadrática son aquellos **valores de x** para los cuales la expresión vale 0; es decir, los **valores de x tales que y = 0** ; que es lo mismo que **f(x) = 0** .

Entonces hacemos

$ax^2 + bx + c = 0$

Como la ecuación **$ax^2 + bx + c = 0$** posee un término de segundo grado, otro de primer grado y un término constante, no podemos aplicar las propiedades de las ecuaciones, entonces, para resolverla usamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces, las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática nos indican los puntos de intersección de la parábola con el **eje de las X (abscisas)** .

Respecto a esta intersección, se pueden dar tres casos:

- Que corte al eje X en dos puntos distintos
- Que corte al eje X en un solo punto (es tangente al eje x)
- Que no corte al eje X

Esta característica se puede determinar analizando el **discriminante.**

Puntos de cortes con el x

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Calcular los cortes con el eje x de la siguiente función.

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$x1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3}}{2 \cdot 1}$	$x2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3}}{2 \cdot 1}$
$x1 = \frac{-2 + \sqrt{4 + 12}}{2}$	$x2 = \frac{-2 - \sqrt{4 + 12}}{2}$
$x1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2}$	$x2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2}$
$x1 = \frac{-2 + 4}{2}$	$x2 = \frac{-2 - 4}{2}$
$x1 = \frac{2}{2}$	$x2 = \frac{-6}{2}$
$x1 = 1$	$x2 = -3$

COLEGIO
FERNANDO DE ARAGÓN
PUENTE ALTO

Actividad:

- Usando fórmula general calcular el corte con el eje x de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

2) $f(x) = x^2 + 5x - 2$

3) $f(x) = -2x^2 + x + 4$

4) $f(x) = x^2 + 3x - 10$

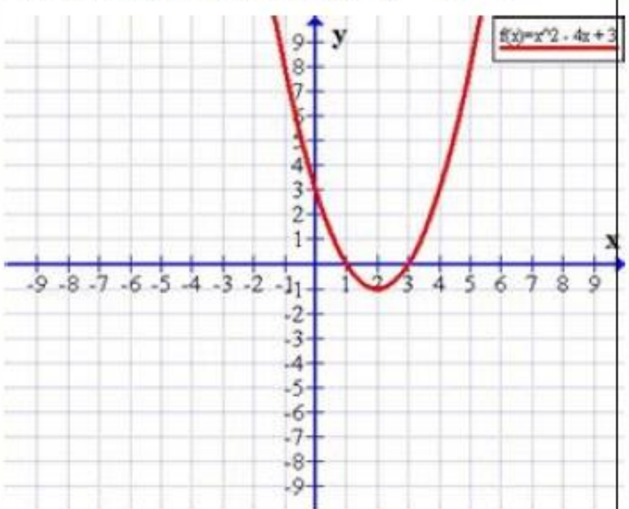
5) $f(x) = x^2 + x - 6$

Punto de corte con el eje y

En el eje de ordenadas (Y) la primera coordenada es **cero** , por lo que el punto de corte en el eje de las ordenadas lo marca el valor de **c (0, c)** .

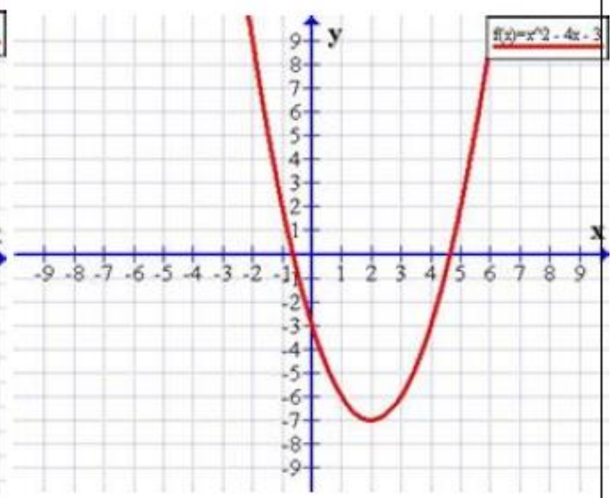
Veamos:

Al representar la función **f(x) = x² – 4x + 3**



El eje de las ordenadas (Y) está cortado en **+3**

Al representar la función **f(x) = x² – 4x – 3**



El eje de las ordenadas (Y) está cortado en **–3**

Por ejemplo: ¿En qué punto corta el eje "Y" la función $f(x) = x^2 + 3x - 10$?

$f(x) = x^2 + 3x - 10$ primero hacemos x=0 resultando

$f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 10$

$f(0) = -10$ por lo tanto la parabola corta el eje "Y" en el punto (0,-10)

Por lo tanto, el corte con el eje Y siempre será en el valor numérico que corresponde a C.

Actividad:

I. Determinar el corte con el eje y de las siguientes funciones:

Función	Corte con el eje y
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	
$f(x) = -x^2 + 17$	
$f(x) = x^2 + 6x - 14$	
$f(x) = 10x^2 - x$	

Vértice

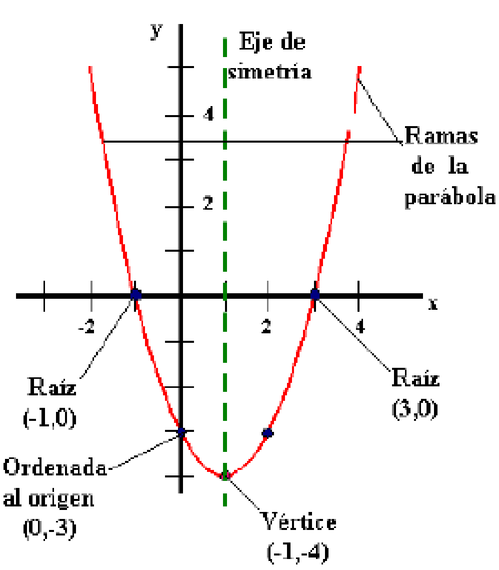
El **vértice** de la parábola es el punto de valor máximo o mínimo de una parábola, esto dependerá de la concavidad e esta y tiene como coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

La abscisa "X" de este punto corresponde al valor del eje de simetría $\left(-\frac{b}{2a}\right)$

y la ordenada "Y", $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Observemos la siguiente imagen



La grafica nos indica que la parábola es cóncava hacia arriba además:
- Corta el eje "X" en los puntos (-1,0) y (3,0)
- Corta el eje "Y" en el punto (0,-3)
- El vértice tiene coordenadas (1,-4)

Por ejemplo. Calcular el véetice de la función $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

Reemplazamos en la fórmula:

$\left(-\frac{4}{2\cdot 2};\ -\frac{(4^2-4\cdot 2\cdot -1)}{4\cdot 2}\right)$
$\left(-\frac{4}{4};\ -\frac{(16+8)}{8}\right)$
$\left(-1;\ -\frac{24}{8}\right)$
$(-1;\ -3)$

COLEGIO FERNANDO DE ARAGÓN PUENTE ALTO

Actividad:

- Calcular el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

1) $f(x) = x^2 + 5x + 2$

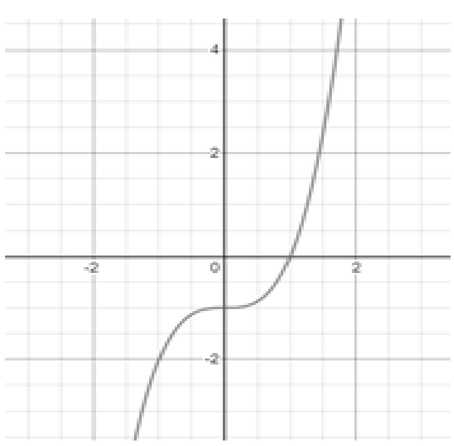
2) $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$

3) $f(x) = 4x^2 + x + 2$

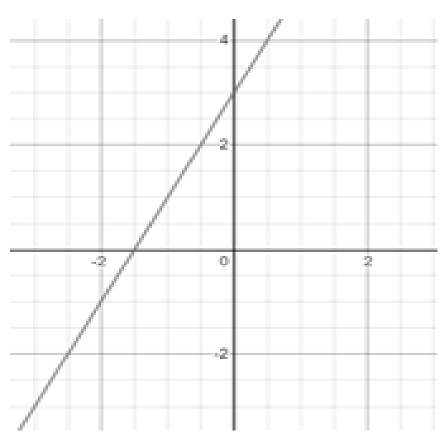
Realizar el siguiente Desafío: En la función $2x^2 + 4x - 1$ debes, obtener cortes con el eje X, Corte con el eje Y, concavidad, vértice y luego graficar.

Responder el siguiente desafío:

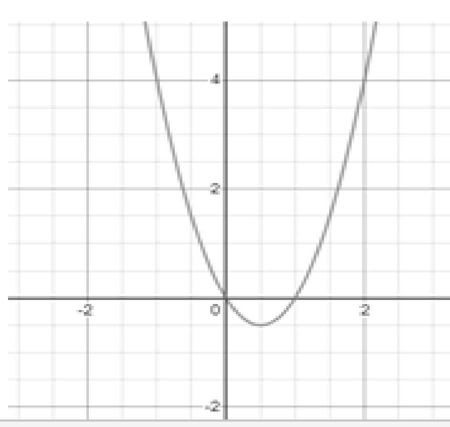
¿Cuál de las siguientes gráficas de funciones, corresponde a una función cuadrática?

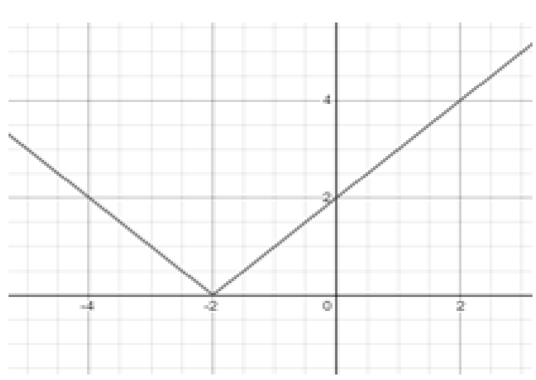


A.



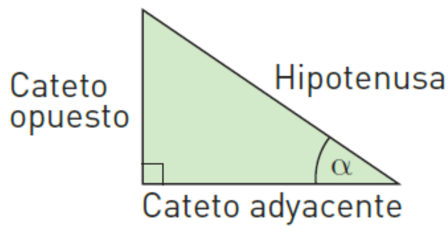
B.





Trigonometría

Parte de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión.



Algunas **razones trigonométricas** para el ángulo α son:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

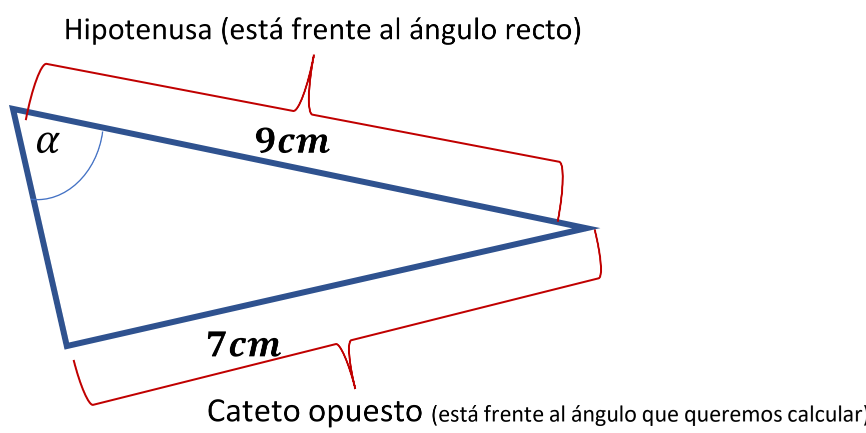
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Tabla de razones trigonométricas
Se utilizará para todos los ejercicios siguientes

Las funciones trigonométricas nos permiten encontrar las medidas de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo cuando conocemos al menos dos de las medidas sus lados, también nos permite encontrar las medidas de los lados si conocemos un ángulo y un lado.

Por ejemplo: Calcular la el ángulo α del siguiente triángulo.



Como tenemos el valor del cateto opuesto y la hipotenusa trabajaremos con el

$$sen\ (\alpha) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$ Reemplazando: $$sen\ (\alpha) = \frac{7}{9}$$

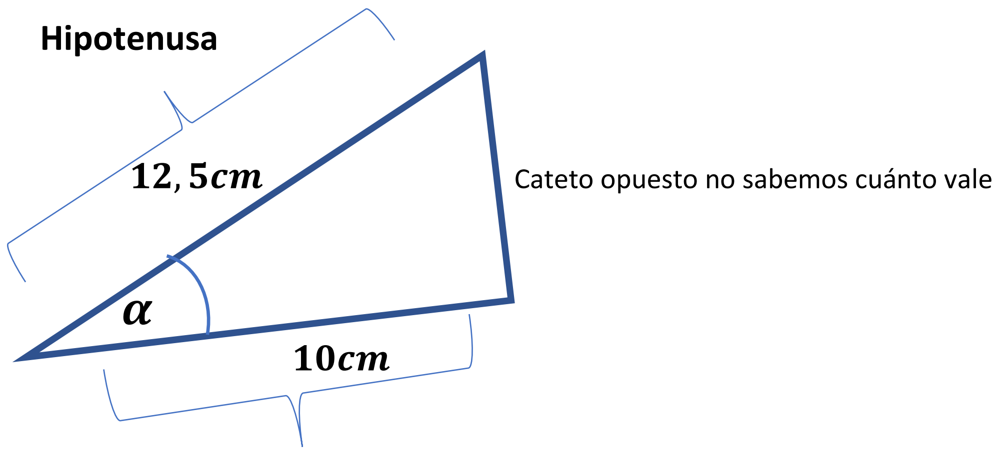
$$sen\ (\alpha) = 0{,}777$$

Por lo tanto, el ángulo α es igual a $\mathbf{51°}$**,** ¿por qué razón?
Observe la tabla que viene a continuación…

El resultado de la división fue 0,777, este debemos buscarlo en la tabla, nos vamos a la columna donde dice SENO y bajamos hasta el 0,777. Una vez realizado esto en la parte izquierda del 0,777 te vas al valor del ángulo y llegas a 51°

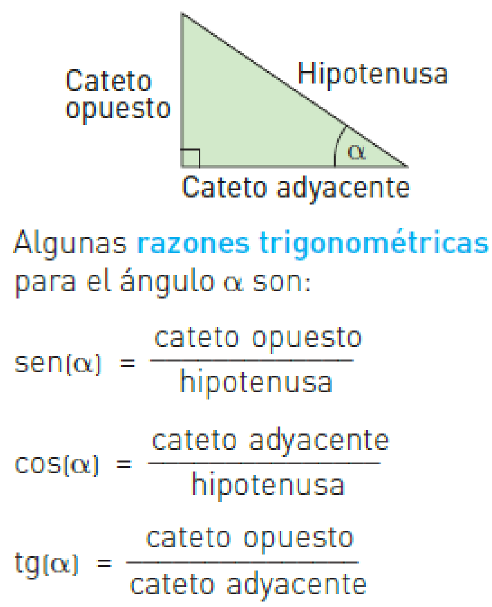
Ángulo	seno	coseno	tangente	Ángulo	seno	coseno	tangente
0º	0	1	0	46º	0,719	0,695	1,036
1º	0,018	1	0,018	47º	0,731	0,682	1,072
2º	0,035	0,999	0,035	48º	0,743	0,669	1,111
3º	0,052	0,999	0,052	49º	0,755	0,656	1,15
4º	0,07	0,998	0,07	50º	0,766	0,643	1,192
5º	0,087	0,996	0,088	51º	0,777	0,629	1,235
6º	0,105	0,995	0,105	52º	0,788	0,616	1,28
7º	0,122	0,993	0,123	53º	0,799	0,602	1,327
8º	0,139	0,99	0,141	54º	0,809	0,588	1,376
9º	0,156	0,988	0,158	55º	0,819	0,574	1,428
10º	0,174	0,985	0,176	56º	0,829	0,559	1,483
11º	0,191	0,982	0,194	57º	0,839	0,545	1,54
12º	0,208	0,978	0,213	58º	0,848	0,53	1,6
13º	0,225	0,974	0,231	59º	0,857	0,515	1,664
14º	0,242	0,97	0,249	60º	0,866	0,5	1,732
15º	0,259	0,966	0,268	61º	0,875	0,485	1,804
16º	0,276	0,961	0,287	62º	0,883	0,47	1,881
17º	0,292	0,956	0,306	63º	0,891	0,454	1,963
18º	0,309	0,951	0,325	64º	0,899	0,438	2,05
19º	0,326	0,946	0,344	65º	0,906	0,423	2,145
20º	0,342	0,94	0,364	66º	0,914	0,407	2,246
21º	0,358	0,934	0,384	67º	0,921	0,391	2,356
22º	0,375	0,927	0,404	68º	0,927	0,375	2,475
23º	0,391	0,921	0,425	69º	0,934	0,358	2,605
24º	0,407	0,914	0,445	70º	0,94	0,342	2,747
25º	0,423	0,906	0,466	71º	0,946	0,326	2,904
26º	0,438	0,899	0,488	72º	0,951	0,309	3,078
27º	0,454	0,891	0,51	73º	0,956	0,292	3,271
28º	0,47	0,883	0,532	74º	0,961	0,276	3,487
29º	0,485	0,875	0,554	75º	0,966	0,259	3,732
30º	0,5	0,866	0,577	76º	0,97	0,242	4,011
31º	0,515	0,857	0,601	77º	0,974	0,225	4,331
32º	0,53	0,848	0,625	78º	0,978	0,208	4,705
33º	0,545	0,839	0,649	79º	0,982	0,191	5,145
34º	0,559	0,829	0,675	80º	0,985	0,174	5,671
35º	0,574	0,819	0,7	81º	0,988	0,156	6,314
36º	0,588	0,809	0,727	82º	0,99	0,139	7,115
37º	0,602	0,799	0,754	83º	0,993	0,122	8,144
38º	0,616	0,788	0,781	84º	0,995	0,105	9,514
39º	0,629	0,777	0,81	85º	0,996	0,087	11,43
40º	0,643	0,766	0,839	86º	0,998	0,07	14,3
41º	0,656	0,755	0,869	87º	0,999	0,052	19,081
42º	0,669	0,743	0,9	88º	0,999	0,035	28,64
43º	0,682	0,731	0,933	89º	1	0,018	57,289
44º	0,695	0,719	0,966	90º	1	0	Inf.
45º	0,707	0,707	1				

Otro ejemplo: Calcular el valor del ángulo α del siguiente triángulo rectángulo



¡¡¡Recordar!!! La El cateto opuesto es aquel que esta justo enfrente al ángulo que queremos calcular. hipotenusa es aquella que esta frente al ángulo recto.

Como ahora tenemos el valor de cateto adyacente e hipotenusa debemos utilizar $\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto adyasente}}{\text{hipotenusa}}$ como muestra en la imagen



Reemplazando: $\cos(\alpha) = \frac{10}{12,5}$

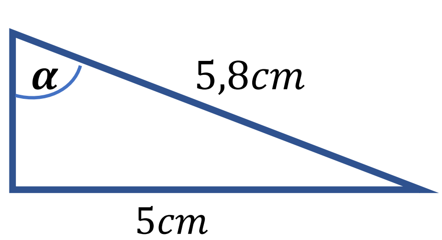
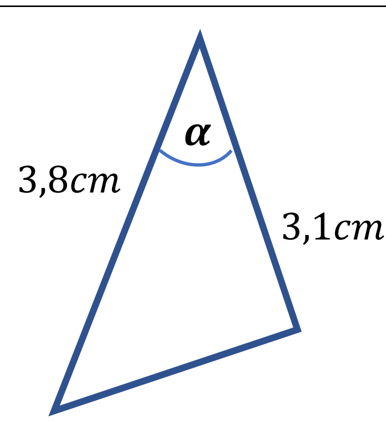
$$\cos(\alpha) = 0,8$$

Buscamos en la tabla (adjunta en hoja anterior) la fila dice coseno y bajamos hasta el 0,8 y obtendremos el ángulo 36°.

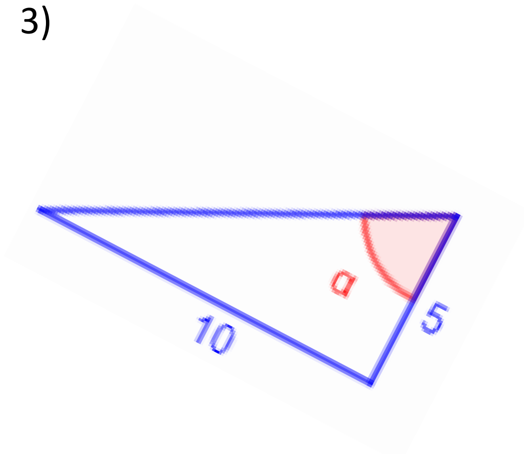
$\alpha = 36°$

Actividad:

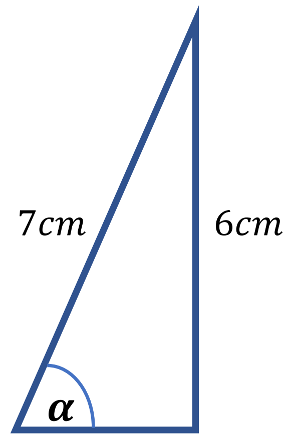
Calcular la medida del ángulo indicado según corresponda.

1) 	2) 

3)

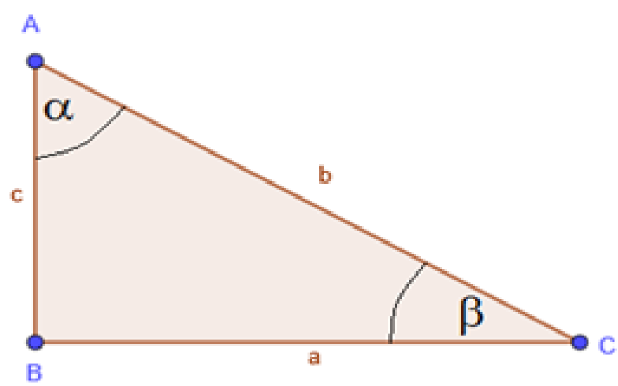


4)



5) Responder el siguiente **Desafío**:

El triángulo ABC es rectángulo en B. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

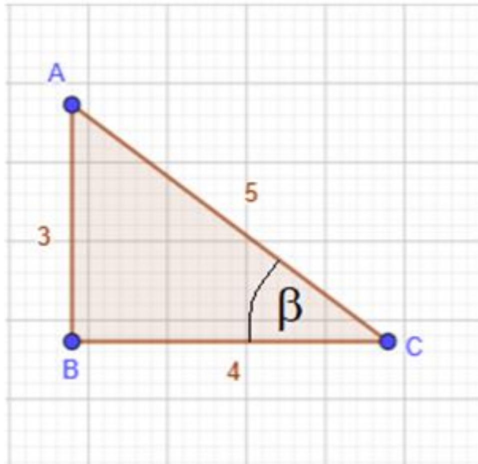


A. $sen(\alpha) = \dfrac{b}{a}$

B. $sen(\alpha) = \dfrac{a}{b}$

C. $sen(\alpha) = \dfrac{c}{b}$

6) **¿Cuál es la medida de tangente del ángulo en C en el siguiente triángulo rectángulo?**



¡Recuerda utilizar la tabla de las razones!

A. $\tan(\beta)=\frac{4}{5}$

B. $\tan(\beta)=\frac{4}{3}$

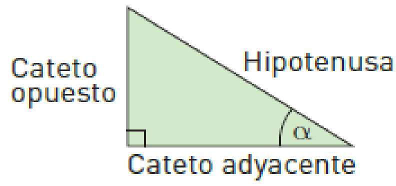
C. $\tan(\beta)=\frac{5}{4}$

D. $\tan(\beta)=\frac{3}{4}$

¿Cómo calcular la medida de los lados de un triángulo rectángulo?

Para ello podemos utilizar la trigonometría. Solo necesitamos conocer un ángulo y un lado, lo que practicaremos ahora.

¡¡Recordar siempre ir utilizando la tabla con las razones trigonométricas!!



Algunas **razones trigonométricas** para el ángulo α son:

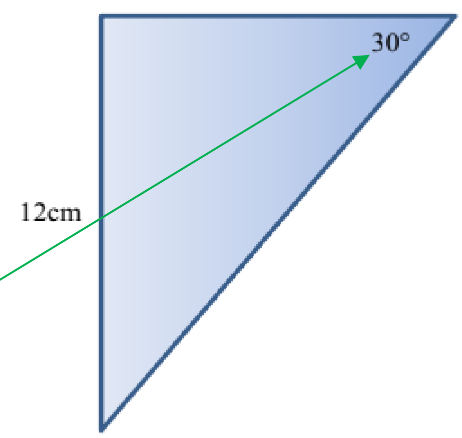
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Ejemplo: Determinar la medida de los lados faltantes (cateto adyacente e hipotenusa) en el siguiente triangulo rectángulo.

Al observar la figura nos damos cuenta que tenemos la medida del cateto opuesto y un Angulo de 30°. Como tenemos el cateto opuesto y queremos encontrar el valor de la hipotenusa, entonces utilizaremos $sen\ (\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$



Reemplazando: $sen\ (30) = \frac{12}{\text{hipotenusa}}$

Lo sacamos de la tabla

$$0{,}5 = \frac{12}{\text{hipotenusa}}$$

Buscamos el ángulo 30 y luego avanzamos hasta donde dice Seno… así llegamos al 0,5

Ahora: Despejamos la hipotenusa

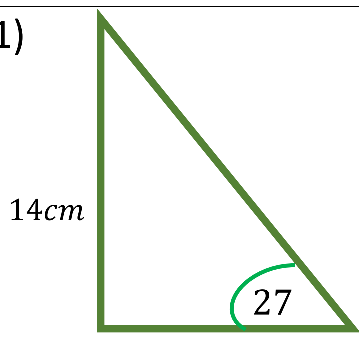
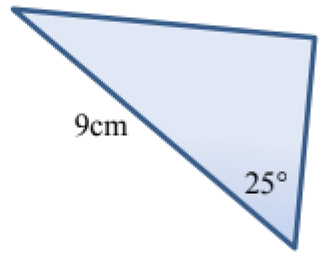
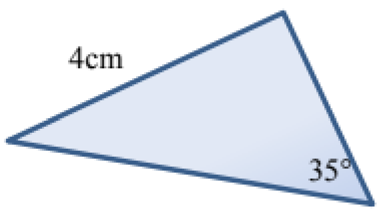
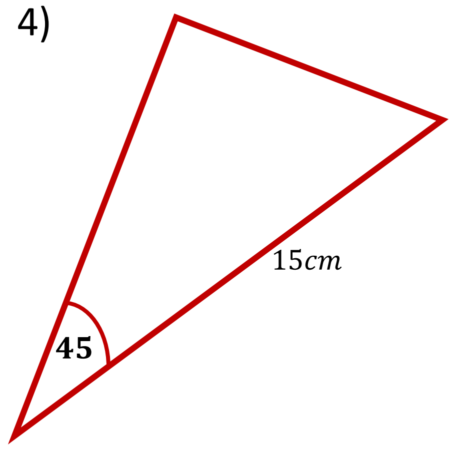
$$\text{hipotenusa} = \frac{12}{0{,}5}$$

$$\text{hipotenusa} = 24\text{cm}$$

Ángulo	seno	coseno	tangente	Ángulo	seno	coseno	tangente
0º	0	1	0	46º	0,719	0,695	1,036
1º	0,018	1	0,018	47º	0,731	0,682	1,072
2º	0,035	0,999	0,035	48º	0,743	0,669	1,111
3º	0,052	0,999	0,052	49º	0,755	0,656	1,15
4º	0,07	0,998	0,07	50º	0,766	0,643	1,192
5º	0,087	0,996	0,088	51º	0,777	0,629	1,235
6º	0,105	0,995	0,105	52º	0,788	0,616	1,28
7º	0,122	0,993	0,123	53º	0,799	0,602	1,327
8º	0,139	0,99	0,141	54º	0,809	0,588	1,376
9º	0,156	0,988	0,158	55º	0,819	0,574	1,428
10º	0,174	0,985	0,176	56º	0,829	0,559	1,483
11º	0,191	0,982	0,194	57º	0,839	0,545	1,54
12º	0,208	0,978	0,213	58º	0,848	0,53	1,6
13º	0,225	0,974	0,231	59º	0,857	0,515	1,664
14º	0,242	0,97	0,249	60º	0,866	0,5	1,732
15º	0,259	0,966	0,268	61º	0,875	0,485	1,804
16º	0,276	0,961	0,287	62º	0,883	0,47	1,881
17º	0,292	0,956	0,306	63º	0,891	0,454	1,963
18º	0,309	0,951	0,325	64º	0,899	0,438	2,05
19º	0,326	0,946	0,344	65º	0,906	0,423	2,145
20º	0,342	0,94	0,364	66º	0,914	0,407	2,246
21º	0,358	0,934	0,384	67º	0,921	0,391	2,356
22º	0,375	0,927	0,404	68º	0,927	0,375	2,475
23º	0,391	0,921	0,425	69º	0,934	0,358	2,605
24º	0,407	0,914	0,445	70º	0,94	0,342	2,747
25º	0,423	0,906	0,466	71º	0,946	0,326	2,904
26º	0,438	0,899	0,488	72º	0,951	0,309	3,078
27º	0,454	0,891	0,51	73º	0,956	0,292	3,271
28º	0,47	0,883	0,532	74º	0,961	0,276	3,487
29º	0,485	0,875	0,554	75º	0,966	0,259	3,732
30º	0,5	0,866	0,577	76º	0,97	0,242	4,011
31º	0,515	0,857	0,601	77º	0,974	0,225	4,331
32º	0,53	0,848	0,625	78º	0,978	0,208	4,705
33º	0,545	0,839	0,649	79º	0,982	0,191	5,145
34º	0,559	0,829	0,675	80º	0,985	0,174	5,671
35º	0,574	0,819	0,7	81º	0,988	0,156	6,314
36º	0,588	0,809	0,727	82º	0,99	0,139	7,115
37º	0,602	0,799	0,754	83º	0,993	0,122	8,144
38º	0,616	0,788	0,781	84º	0,995	0,105	9,514
39º	0,629	0,777	0,81	85º	0,996	0,087	11,43
40º	0,643	0,766	0,839	86º	0,998	0,07	14,3
41º	0,656	0,755	0,869	87º	0,999	0,052	19,081
42º	0,669	0,743	0,9	88º	0,999	0,035	28,64
43º	0,682	0,731	0,933	89º	1	0,018	57,289
44º	0,695	0,719	0,966	90º	1	0	Inf.
45º	0,707	0,707	1				

Ahora resuelve tu…

Encontrar la medida de los lados faltantes, según corresponda

1)  Encontrar el valor de los 2 lados faltantes.	2)  Encontrar el valor de los 2 lados faltantes.
3)  Encontrar el valor de los 2 lados faltantes.	4)  Encontrar el valor de los 2 lados faltantes.