Guía N°3 Matemática
I° Medio

Nombre: ____________________________________ Curso: ____________ Fecha: ___________

Asignatura: Matemática
Unidad II. Álgebra y Funciones

- OA 7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal:
    - Utilizando tablas.
    - Usando metáforas de máquinas.
    - Estableciendo reglas entre x e Y.
    - Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
- OA 8: Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma:
    - $ax = b\ ; \frac{x}{a} = b\ , a \neq 0$
    - $ax + b = c\ ; \frac{x}{a} + b = c\ ; ax = b + cx\ ; a(x + b) = c$
    - $ax + b = cx + d\ ; a, b, c, d\ en\ Q$

Unidad III. Geometría
OA 11. Desarrollar las formulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros:

- Estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen.
- Desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie.
- Transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros.
- Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.

Álgebra y Funciones: Función.

Una función, es una relación entre dos variables *x* e *y* de manera que, a cada valor de **x**, llamado **preimagen**, le corresponde un único valor de ***y***, llamado **imagen**.

Como el valor de ***y*** depende del valor de ***x***, se dice que ***y*** es la variable dependiente y ***x*** es la variable independiente. Es decir,

Variable independiente: ***x***
Variable dependiente: ***y***

Se denota como $f(x) = y$, se lee de la forma, *"función f de x"*.

Por ejemplo,

- La función $y = 2x + 1$, también se puede escribir como $f(x) = 2x + 1$.
- La función $y = -5x + 8$, también se puede escribir como $g(x) = -5x + 8$.
- La función $y = -x - 3$, también se puede escribir como $h(x) = -x - 3$.

*Considerar que una función se representa por una letra minúscula, usualmente, es la letra f, sin embargo, también puede utilizarse otras consonantes como en el ejemplo anterior.

Representaciones de una función

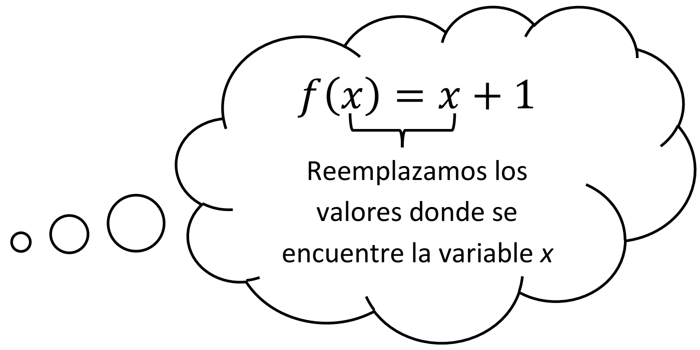
1. **Tabla:** Al representar la función $f(x) = x + 1$ en una tabla de valores obtenemos:
   - Daremos valor a *x*, y reemplazaremos ese valor en la función, para poder encontrar el valor de *y*.

X	Y
-1	0
0	1
1	2

$f(-1) = -1 + 1 = 0$

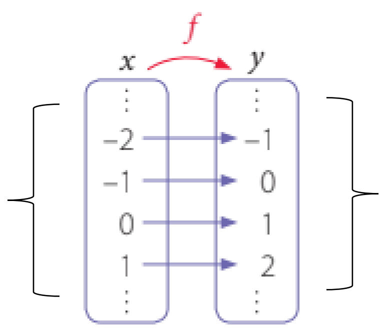
$f(0) = 0 + 1 = 1$

$f(1) = 1 + 1 = 2$



2. **Diagrama:** En un diagrama sagital podemos relacionar los elementos por medio de flechas desde el conjunto de partida al conjunto de llegada.

Dominio de la *función*, *Dom (f)*, corresponde a los valores de *x*, es decir, la preimagen.

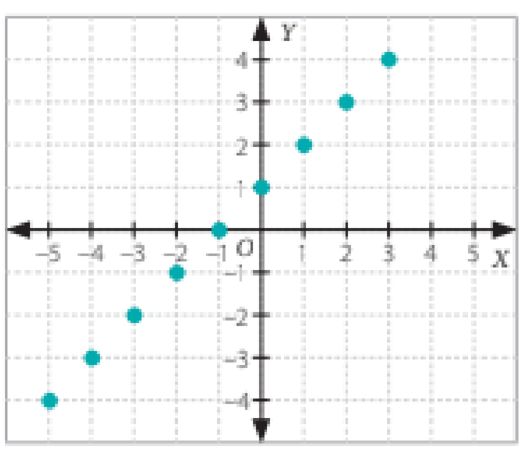


Recorrido de la *función*, *Rec (f)*, corresponde a los valores de *y*, es decir, las imágenes del dominio.

Si tenemos la función, $f(x) = x + 1$

- El dominio, *Dom (f)*= {…, -2, -1, 0, 1, …}
- El recorrido, *Rec (f)*= {…, -1, 0, 1, 2, …}

3. **Gráfico:** Esta representación corresponde al conjunto de pares ordandos (x, y) que satisfacen la función.



4. **Expresión algebraica:** Podemos representar la función f con una expresión algebraica. Por ejemplo,

$$f(x) = x + 1$$

<u>Ejercicios:</u>

I. Determina las variables dependientes e independientes de las siguientes relaciones.

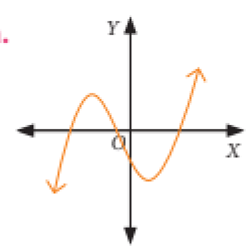
a) La cantidad de respuestas correctas en la prueba y la nota obtenida.
Variable dependiente:
Variable independiente:

b) El volumen de un cubo y la medida de su arista.
Variable dependiente:
Variable independiente:

c) La cantidad de Kilogramos de naranjas y su precio.
Variable dependiente:
Variable independiente:

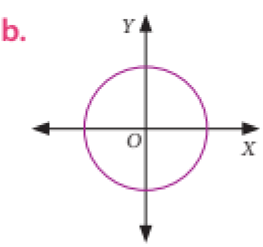
II. Determina si las siguientes graficas son funciones.

a.



____

b.

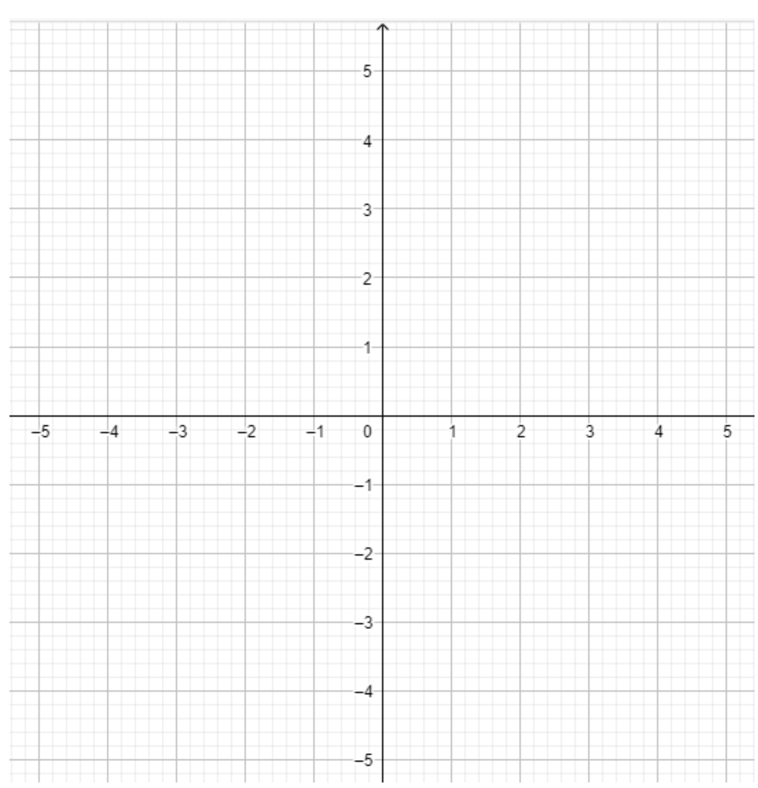


____

III. Grafica las siguientes funciones, utilizando tabla de valores.

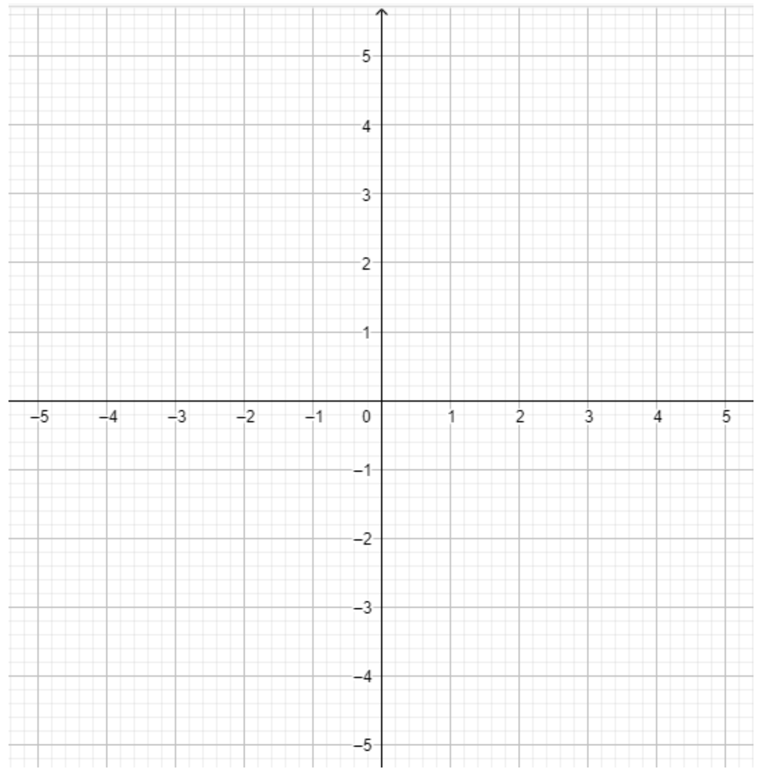
a) $f(x) = x - 2$

x	y
0	
1	
-1	
2	
-2	



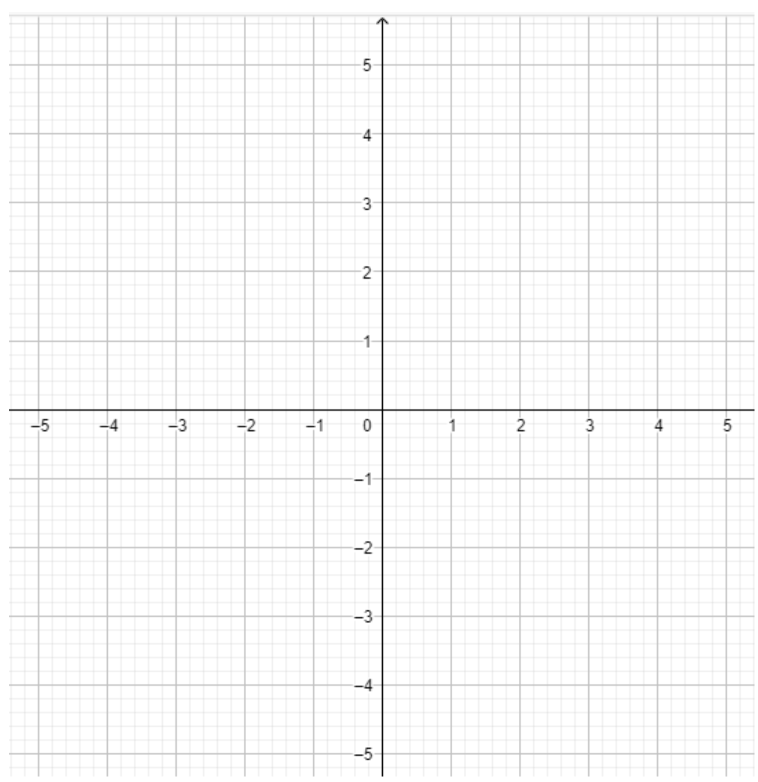
b) $g(x) = -x + 3$

x	y
0	
1	
-1	
2	
-2	



c) $h(x) = 2x - 1$

x	y
0	
1	
-1	
2	
-2	



IV. Determina el valor de la imagen, a partir de la función dada

$$f(x) = 5x - 3$$

a) $\boldsymbol{f(-3) = \ 5 \cdot (-3) - 3 = -15 - 3 = -18}$

b) $f(-1) =$

c) $f(6) =$

V. Marca la alternativa correcta

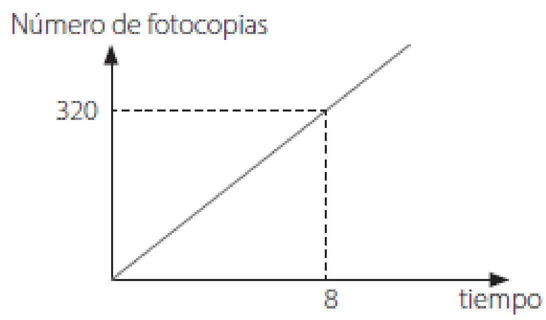
1. El siguiente gráfico muestra la cantidad de fotocopias que saca una máquina en un tiempo determinado. La función que modela esta relación es:

A) $f(x) = \frac{x}{40}$

B) $f(x) = 40x$

C) $f(x) = 8x$

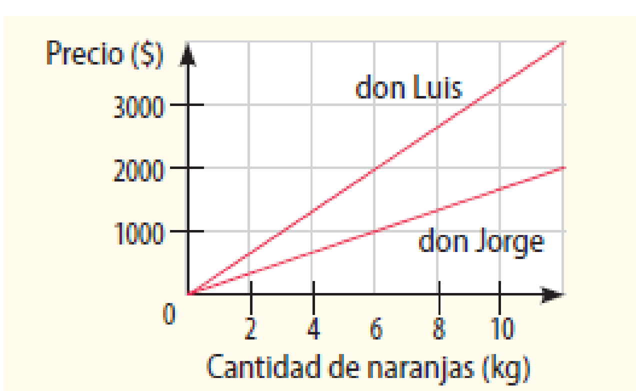
D) $f(x) = 320x$



2. En una panadería el precio de cada empanada de pino es de \$590 ¿Cuál es la función que relaciona la cantidad de empanadas que se compran y el precio total a pagar?

a) $x = 590$
b) $f(x) = 590$
c) $f(x) = x + 590$
d) $f(x) = 590x$

3. El siguiente gráfico representa los costos en pesos, para diferentes cantidades de naranjas expresadas en kilogramos



¿Cuál de las siguientes alternativas entrega la información correcta?

a) Es más conveniente el kilo de naranjas que vende don Luis.
b) Por \$1000 se compran 6 kilos de naranjas donde don Jorge.
c) La función que modela la cantidad de kilos y el precio total a pagar donde don Luis es f (x)= 200x
d) Don Luis y Don Jorge venden el kilo de naranja al mismo precio.

4. Un taxista cobra como costo fijo $240 y $180 por cada kilómetro recorrido. La función que relaciona las variables distancia (x) y costo del viaje (y) es:

a) $f(x) = 180x$
b) $f(x) = 240x$
c) $f(x) = 180x + 240$
d) $f(x) = 240x + 180$

5. En un restaurant de pizza se cobra una entrada de $ 2.500 y por cada trozo de pizza que consumes $ 300. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **<u>FALSA</u>**?

a) Si una persona consume 6 pizzas en el restaurant, gasta $4.300
b) Si una persona consume muchos trozos de pizzas, gasta más dinero.
c) La fórmula que relaciona estas variables es $f(x) = 2500 + 300x$
d) Ana consume *n* trozos de pizzas, Luisa consume $2 \cdot n$ trozos de pizza, entonces, Luisa gasta menos dinero que Ana.

Geometría: área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros.

¡¡Recordar!!

Para poder comprender el área y volumen de prismas rectos es necesario, activar los conocimientos de ¿cómo calculamos el área de una figura plana?

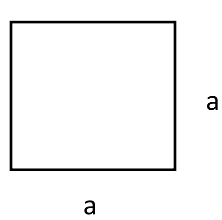
El ***área*** (A) de una figura, es la cantidad de superficie que ocupa.

Depende de cada figura como calcularemos el área:

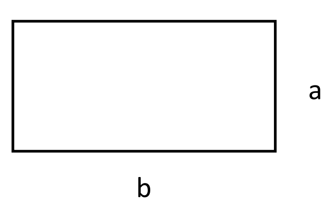
<u>Área de un cuadrado</u>

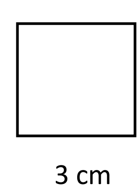
<table>
<tr>
<td>Área de un cuadrado: lado por lado

$A_{\square} = a \cdot a = a^2$


a
a</td>
<td>Área de un rectángulo: lado por lado

$A_{\square} = a \cdot b$


a
b</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Ejemplo: Calcular el área de un cuadrado de lado 3 cm.


3 cm
3 cm

Entonces, para calcular el área debemos multiplicar los dos lados
$A_{\blacksquare} = 3cm \cdot 3cm = 9cm^2$

Por lo tanto, el área del cuadrado es $9cm^2$</td>
</tr>
</table>

Ejercicio 1: Calcular el área de un cuadrado de lado 5 cm.

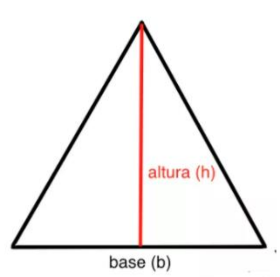
Ejercicio 2: Calcular el área de un rectángulo de lados 3 cm de ancho y 5 cm de largo.

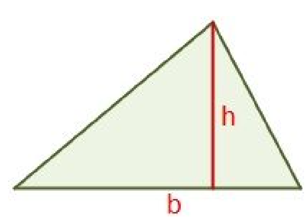
Área de un triángulo

Área de un triángulo: base por altura dividido por 2

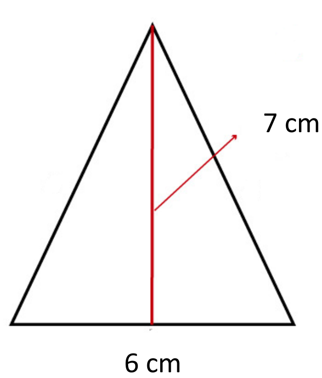
$$A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$$

base : *b* Altura : *h*





Ejemplo: Calcular el área del siguiente triángulo

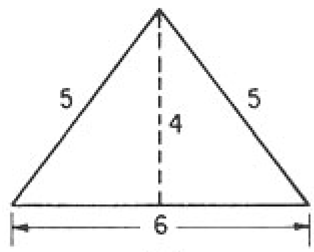


Entonces, aplicamos los valores de la base y la altura en la formula y resolvemos de la siguiente manera.

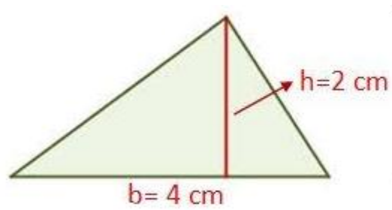
$$A_{\triangle} = \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

Por lo tanto, el área de un triángulo es $21 cm^2$.

Ejercicio 1: Calcular el área del siguiente triángulo



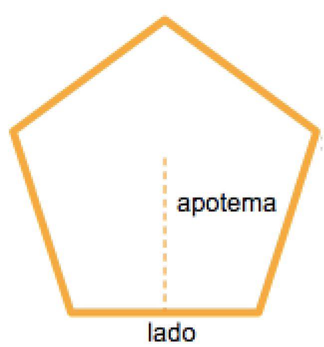
Ejercicio 2: Calcular el área del siguiente triángulo



Área de un pentágono

Área de un pentágono: Corresponde al perímetro (P) por la apotema (ap) y luego dividir por 2.

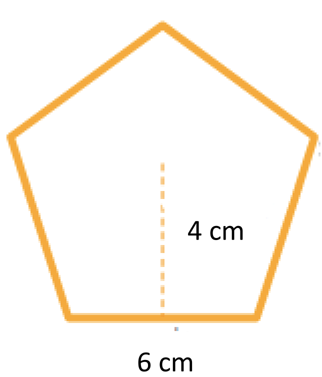
$$A_{⌂} = \frac{P \cdot ap}{2}$$



Perímetro: es la suma de todos sus lados.

***Esta fórmula sirve para calcular el área de cualquier polígono regular de lado mayor a 4.**

Ejemplo: Calcular el área del siguiente pentágono



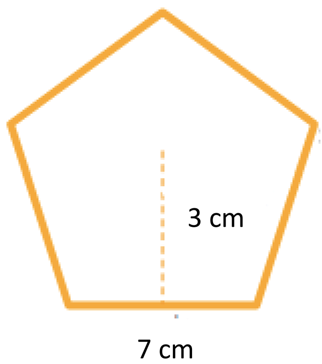
$$A_{⌂} = \frac{30\ cm \cdot 4\ cm}{2}$$
$$= \frac{120 cm^2}{2}$$
$$= 60 cm^2$$

Perímetro: es la suma de todos sus lados.

$$P = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$$
$$= 5 \cdot 6$$
$$= 30$$

El área de un pentágono es $60 cm^2$.

Ejercicio: Calcular el área del siguiente pentágono



Perímetro: es la suma de todos sus lados.

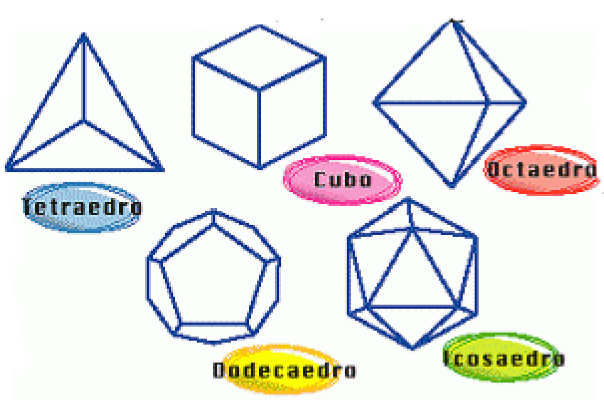
$P =$

Para poder trabajar en el **área** y el **volumen** de prismas rectos debemos comprender ciertos conceptos, ya que, un prisma es un poliedro.

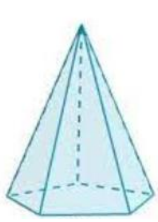
¿Qué es un poliedro? ¿Qué es un prisma y un prisma recto?

Polígono: figura geométrica plana que está limitada por tres o más rectas y tiene tres o más ángulos y vértices (Ej. Triángulo, Cuadrado, Pentágono, etc.)

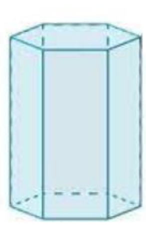
Poliedro: corresponde a un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos y pueden ser regulares (cuando todas sus caras son polígonos regulares y congruentes entre sí) o no regulares.



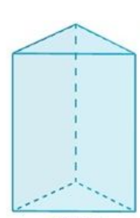
Polígonos regulares



Pirámide



Prisma Hexagonal



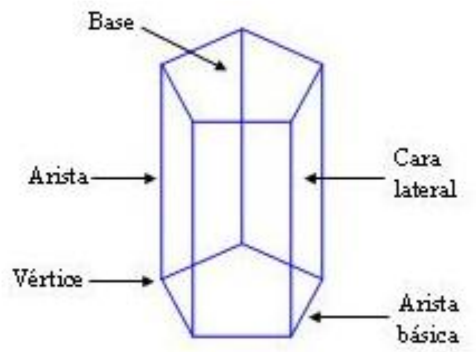
Prisma triangular

Polígonos no regulares

Por lo tanto, un ***prisma*** es un poliedro cuyas caras laterales son paralelógramos y sus caras basales son paralelas y corresponden a polígonos congruentes.

Y un ***prisma recto*** es aquel cuyas caras laterales son rectángulos o cuadrados. La altura de un prisma recto coincide con su arista lateral.

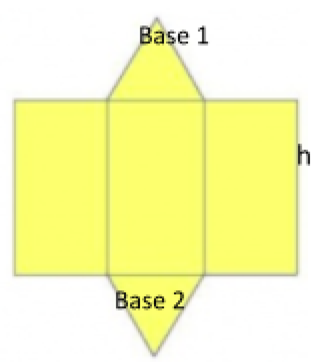
Partes de un prisma:



Área total (A_T) de un prisma

El área de un prisma es igual a la suma de sus áreas laterales $(\boldsymbol{A_L})$ y basales $(\boldsymbol{A_B})$.

Por ejemplo, en el caso del prisma con base triangular:



$$Área\ base\ 1:\ A_{B1} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Calculamos el área de un triángulo, porque la base del prisma es triangular

$$Área\ base\ 2:\ A_{B2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$Área\ lateral:\ A_L = P_B \cdot h$$

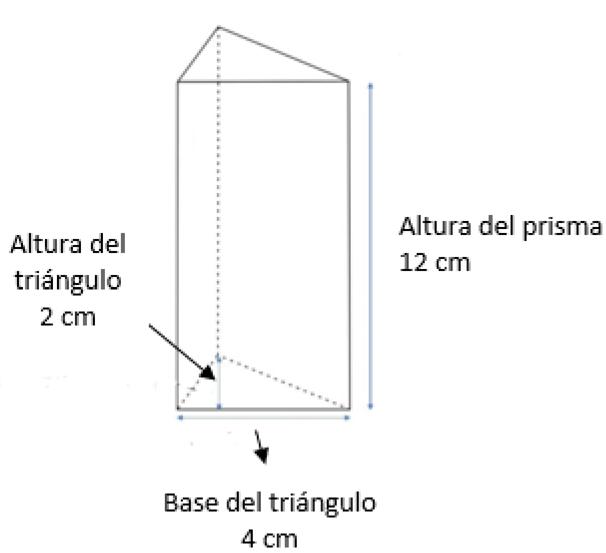
$$Área\ total:\ A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$$

b: base del triángulo

h: altura

P_B: perímetro de la base

Ejemplo: Calcular el área total del siguiente prisma.



Datos:

- Base del triángulo: 4 cm
- Altura del triángulo: 2 cm
- Altura del rectángulo: 12 cm
- Base del rectángulo: 12 cm

Luego, reemplazamos los datos en cada una de las fórmulas

$\acute{A}rea\ base\ 1:\ A_{B1} = \frac{b \cdot h}{2}$ ⟶ $\acute{A}rea\ base\ 1:\ A_{B1} = \frac{4 \cdot 2}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm^2$

$\acute{A}rea\ base\ 2:\ A_{B2} = \frac{b \cdot h}{2}$ ⟶ $\acute{A}rea\ base\ 2:\ A_{B2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = \frac{8}{2} = 4cm^2$

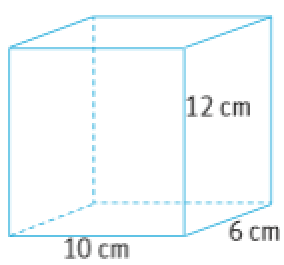
$\acute{A}rea\ lateral:\ A_L = P_B \cdot h$ ⟶ $\acute{A}rea\ lateral:\ A_L = 12 \cdot 12 = 144\ cm^2$

$\acute{A}rea\ total:\ A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$ ⟶ $\acute{A}rea\ total:\ A_T = 4cm^2 + 4cm^2 + 144cm^2 = 152cm^2$

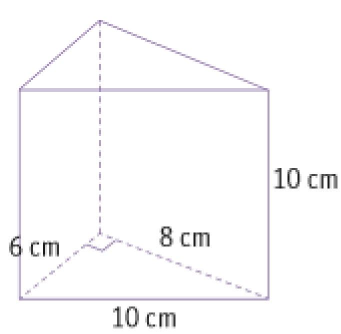
El área total del prisma es de $152\ cm^2$.

Ejercicios: Calcular el área total de los siguientes prismas.

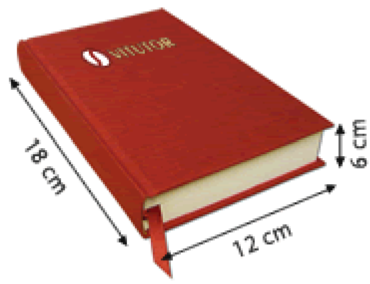
1. Este prisma tiene base rectangular, por lo tanto, debes calcular el área de la base (A_B) :
   $A_B = lado \cdot lado$



2. Este prisma tiene de base un triángulo rectángulo

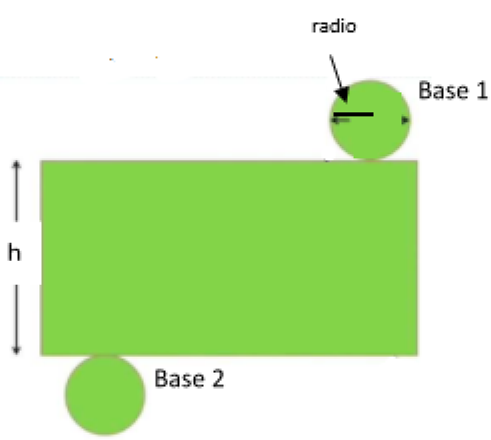


3. Calcular el área del siguiente libro (tiene forma de prisma rectangular)



Área total (A_T) de un cilindro

El **área** de un cilindro, tal como el **área** de un prisma, es igual a la suma de sus áreas laterales $(\boldsymbol{A_L})$ y basales $(\boldsymbol{A_B})$.



$$\acute{A}rea\ base\ 1:\ A_{B1} = \pi \cdot r^2$$

$$\acute{A}rea\ base\ 2:\ A_{B2} = \pi \cdot r^2$$

$$\acute{A}rea\ lateral:\ A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$$

$$\acute{A}rea\ total:\ A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$$

π: letra griega pi

h: altura

r: radio

Ejemplo:

a. Calcular el área total del siguiente cilindro.

Datos:

- Radio (r): 5 cm
- Altura (h): 8 cm
- π

Reemplazamos los datos en cada una de las fórmulas

$$\acute{A}rea\ base\ 1\colon\ A_{B1} = \pi \cdot r^2 \longrightarrow \acute{A}rea\ base\ 1\colon\ A_{B1} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\ cm^2$$

$$\acute{A}rea\ base\ 2\colon\ A_{B2} = \pi \cdot r^2 \longrightarrow \acute{A}rea\ base\ 2\colon\ A_{B2} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\ cm^2$$

$$\acute{A}rea\ lateral\colon\ A_L = 2\pi \cdot r \cdot h \longrightarrow \acute{A}rea\ lateral\colon\ A_L = 2\pi \cdot 5 \cdot 8$$

$$= (2 \cdot 5 \cdot 8)\pi = 80\pi cm^2$$

$$\acute{A}rea\ total\colon\ A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L \longrightarrow \acute{A}rea\ total\colon\ A_T = 25\pi + 25\pi + 80\pi$$

$$= 130\pi\ cm^2$$

Por lo tanto, el área total del cilindro es $130\pi cm^2$.

Ejercicios: Calcular el área de los siguientes cilindros

1.

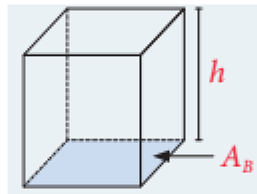
2.

3. Calcula el área total del cilindro según las medidas 16 m de radio y 27 m de altura.

Volumen (V) de un prisma

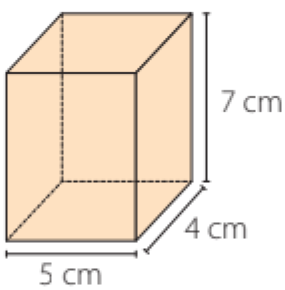
El volumen de un prisma se puede determinar calculando el producto del área basal (A_B) por la medida de su altura (h). Es decir,

$$V = A_B \cdot h$$



Como en este caso la base es un cuadrado se debe calcular el área del cuadrado (área basal)

Ejemplo: Calcular el volumen de un prisma de base rectangular



Datos del prisma:
Altura (h): 7 cm

Datos de la base (es un rectángulo):
Largo: 5 cm
Ancho: 4 cm

Primero, calcularemos el área de la base (A_B), como es un rectángulo, debemos multiplicar lado por lado.

$$A_B = lado \cdot lado = 5cm \cdot 4cm = 20cm^2$$

Luego, este resultado lo multiplicamos por la altura, de la siguiente forma:

$$V = A_B \cdot h$$

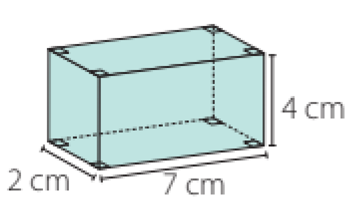
$$V = 20\ cm^2 \cdot 7\ cm$$

$$V = 140\ cm^3$$

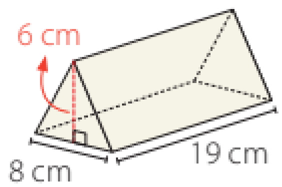
Finalmente, el volumen del prisma es $140\ cm^3$.

Ejercicios:

1. Calcular el volumen del siguiente prisma.



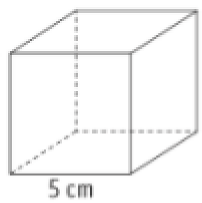
2. Calcular el volumen del prisma con base triangular



Para calcular el área basal,

$$A_B = \frac{b \cdot h}{2}$$

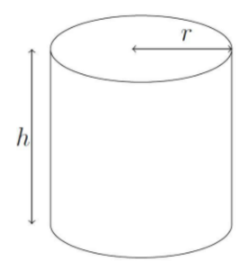
3. Calcula el volumen del siguiente cubo



Volumen (V) de un cilindro

El volumen de un cilindro se asemeja al de un prisma. Para calcularlo se determina el área de la base (A_B) y se multiplica por la medida de su altura. Es decir,

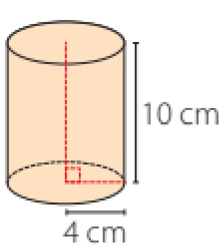
$$V = A_B \cdot h$$



Recordar!! En este caso la base es una circunferencia, por lo tanto, el área de la base, la obtenemos de la siguiente forma:

$$A_B = \pi \cdot r^2$$

Veamos un ejemplo: Calcular el volumen del siguiente cilindro



Datos del cilindro:

Altura (h): 10 cm
Radio (r): 4 cm

Primero, calcularemos el área de la base (A_B), como es un circulo, debemos resolver la siguiente formula:

$$A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi\ cm^2$$

Luego, este resultado lo multiplicamos por la altura, de la siguiente forma:

$$V = A_B \cdot h$$

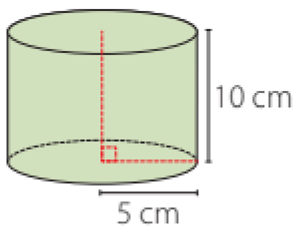
$$V = 16\pi\ cm^2 \cdot 10\ cm$$

$$V = 160\pi\ cm^3$$

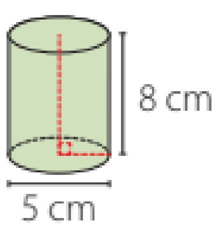
Finalmente, el volumen del prisma es $160\pi\ cm^3$.

Ejercicios:

1. Calcular el volumen del siguiente cilindro



2. Calcular el volumen del siguiente cilindro



Recuerda que el radio va desde el centro hasta un punto del borde de la figura.

3. Calcular el volumen del siguiente cilindro