



Guía N°3 Matemática, III° Medio.

Nombre de alumno/a: Curso:.....

Unidad: Números y función cuadrática. Contenido: Raíces, logaritmos y función cuadrática.

OA11: Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

OA 1: Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:

- utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces
- combinando raíces con números racionales
- resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos

Permutaciones y factorial

Permutar es colocar TODOS los elementos que se tengan en distintas posiciones, para ello Hay que tener en cuenta lo siguiente:

Sí importa el orden, ya que el intercambio entre dos elementos distintos genera una nueva permutación.

No se repiten los elementos, ya que de repetirse o ser iguales entre sí, al intercambiarlos no se genera una nueva permutación.

Para calcular el total de permutaciones se utiliza la siguiente fórmula:

$$P_n = n!$$

Los factoriales y permutaciones nos sirven para la combinatoria. Nos dice cuántas combinaciones posibles se pueden hacer con ciertos elementos.

Por ejemplo: si tenemos un \triangle \square \circ ¿De cuántas formas distintas podemos ordenar estos elementos?

Ahora utilizaremos factoriales, Como son 3 elementos distintos, quedará:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$3! = 6$$

Se puede ordenar de 6 formas diferentes

Visualmente quedaría así:



6 formas distintas de ordenarlas

Entonces si tenemos un $4!$ $5!$ $9!$ Quedará de la siguiente manera:

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$4! = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$5! = 120$
$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$9! = 362.880$

Ahora tú

1) Calcular el valor de las siguientes expresiones

a. $6!$

b. $7!$

c. $12!$

d. $8!$

2) Rosario tiene 12 libros de una colección que ha comenzado a formar. Si para guardarlos ha instalado una repisa en su pieza, ¿de cuántas maneras puede ordenarlos?

3) $\frac{9!}{7!} =$

4) $\frac{3!}{2!}$

5) Indicar en cada caso si es verdadero o falso

Factorial	Verdadero o falso
$\frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10$	
$\frac{7!}{7!} = 1$	
$\frac{5!}{4!} = 5 \cdot 4$	

Variación

Se llama variación de n elementos escogidos entre m (se escribe V_n^m) a la cantidad de ordenamientos posibles de n elementos, escogidos entre m . La cantidad de ellos se puede calcular como:

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Por ejemplo: La profesora Valentina debe seleccionar entre 5 de sus alumnos (Andrés, Bruno, Carla, Diego y Eugenia) a 3 de ellos (considerando el orden de selección) los cuales representarán al liceo en una competencia. ¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo?

m → Total, de alumnos = 5

n → Total, de alumnos que irán = 3

Reemplazando tenemos: $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{(2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Ahora tú

<p>1) Si hay 4 elementos, y se quieren escoger 2 (considerando el orden), ¿cuántas posibilidades hay?</p> <p>a) 8 b) 12 c) 24 d) 6</p>	<p>2) Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar?</p> <p>a) 210 números de 3 cifras distintas se pueden formar. b) 5.040 números de 3 cifras distintas se pueden formar c) 4 números de 3 cifras distintas se pueden formar d) 520 números de 3 cifras distintas se pueden formar</p>
<p>3) Con las cifras 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar?</p> <p>a) 65.321 b) 8.645 c) 1.680 d) 40.320</p>	<p>4) En una urna hay 3 fichas numeradas del 1 al 3. Se sacan, al azar, de uno en uno los tres números ¿Cuál es la probabilidad que salga la combinación 321?</p> <p>A. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$</p>

5) En una bolsa hay 4 fichas numeradas del 1 al 4. Se sacan al azar dos fichas y se registra el número, ¿Cuál es la probabilidad que salga el 23 o el 32?

a) $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{15}{3}$

c) $\frac{3}{20}$

d) $\frac{1}{20}$

6) En un recipiente hay 6 bolitas numeradas del 1 al 6. Se sacan 3 bolitas secuencialmente (sin reposición) y se registra el número que se forma. ¿Cuál es la probabilidad que se forme el número 123?

a) $\frac{1}{6}$

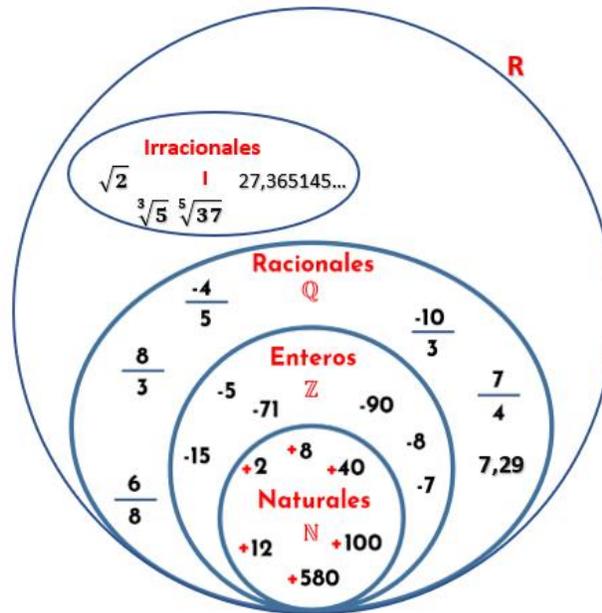
b) $\frac{1}{120}$

c) 2

d) 25

Conjuntos numéricos

Los **conjuntos numéricos** son agrupaciones de números que guardan una serie de propiedades estructurales.



- Identifica si cada número pertenece (\in) o no pertenece (\notin) al conjunto dado.

	N	Z	Q	I
21				
3,14				
- 256 898				
$\sqrt{144}$				
$\sqrt{35}$				
$-\sqrt{49}$				
- 29,1				
12,7639876				
$\sqrt{3}$				

Activación de conocimientos

Recordando cuadrados de algunos números:

$$\begin{array}{ll} 1^2 = 1 & 6^2 = 36 \\ 2^2 = 4 & 7^2 = 49 \\ 3^2 = 9 & 8^2 = 64 \\ 4^2 = 16 & 9^2 = 81 \\ 5^2 = 25 & 10^2 = 100 \end{array}$$

Recordando raíces cuadradas exactas:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{1} = 1 & \sqrt{36} = 6 \\ \sqrt{4} = 2 & \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{9} = 3 & \sqrt{64} = 8 \\ \sqrt{16} = 4 & \sqrt{81} = 9 \\ \sqrt{25} = 5 & \sqrt{100} = 10 \end{array}$$

Propiedades de las Raíces

<ul style="list-style-type: none"> Producto de raíces: $\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} \\ \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{10} &= \sqrt[3]{50} \end{aligned}$	<ul style="list-style-type: none"> Cociente de raíces: $\begin{aligned} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \\ \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{3} \end{aligned}$
<ul style="list-style-type: none"> Raíz de una raíz: $\begin{aligned} \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n \cdot m]{a} \\ \sqrt[3]{\sqrt[5]{6}} &= \sqrt[15]{6} \end{aligned}$	

Ejercitación:

1. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$	2. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$
3. $\frac{\sqrt[5]{21}}{\sqrt[5]{3}} =$	4. $\frac{\sqrt[2]{26}}{\sqrt[2]{13}} \cdot \sqrt[2]{8} =$
5. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4}} =$	6. $\sqrt[8]{17} \cdot \sqrt{\sqrt[4]{2}} =$

Descomposición de raíces no exactas

¿Qué significa descomponer raíces cuadradas?

Significa separar en cuadrados perfectos el subradical para expresar la raíz de forma más sencilla. Este método se puede aplicar índice a raíces de cualquier.

¿Como descomponer raíces?

Paso 1 $\sqrt{12}$	Raíz de 12 no tiene como resultado un número entero, por lo tanto, vamos a descomponer.
Paso 2 $\sqrt{4 \cdot 3}$	Si multiplicamos 4 con 3 el resultado es 12
Paso 3 $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$	Acá debemos separar en raíces cada factor.
Paso 4 $2\sqrt{3}$	<ul style="list-style-type: none"> • Resolvemos la raíz cuadrada de 4, la cual es exacta. • Como la raíz cuadrada de 3 no es exacta lo dejamos expresado con raíz.

Otro ejemplo:

Paso 1 $\sqrt{32}$	Si observamos $\sqrt{32}$, no tiene como resultado un número entero, por lo tanto, vamos a descomponer. Separaremos el 32 en la multiplicación de dos números enteros.
Paso 2 $\sqrt{16 \cdot 2}$	En este caso la multiplicación quedaría como $16 \cdot 2$.
Paso 3 $\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}$	Acá debemos separar en raíces cada factor.
Paso 4 $4\sqrt{2}$	<ul style="list-style-type: none"> • Resolvemos la raíz cuadrada de 16, la cual es exacta. • Como la raíz cuadrada de 2 no es exacta lo dejamos expresado con raíz.

Aplicando el concepto de descomposición de raíz no exacta, resolver los siguientes ejercicios:

$\sqrt{18} =$	$\sqrt{20} =$	$\sqrt{40} =$
$\sqrt{50} =$	$\sqrt{8} =$	$\sqrt{24} =$

Suma y resta de raíces con igual índice e igual subradical.

Podemos sumar o restar raíces solamente cuando estos tengan igual índice y con igual subradical.

1. $2\sqrt{6} + 8\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$  Acá mantenemos $\sqrt{6}$; pero debemos sumar o restar (dependiendo del signo) los valores que los acompañan.
2. $2^5\sqrt{3} + 5^4\sqrt{9} + 10^5\sqrt{3} - 4^5\sqrt{3} - 3^4\sqrt{9} = 8^5\sqrt{3} + 2^4\sqrt{9}$ 
 - En este caso juntamos el segundo y quinto término porque tienen exactamente la misma raíz.
 - En el caso del primero, tercero y cuarto término pasa exactamente lo mismo, como las raíces son iguales podemos juntar los números que están al costado.

Ahora tú:

1. $5^3\sqrt{7} + 2^3\sqrt{7} - 3^3\sqrt{7}$	2. $2^2\sqrt{5} + 4^2\sqrt{9} - 3^2\sqrt{9} + 6^2\sqrt{5}$	3. $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} =$
4. $8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} =$	5. $6\sqrt{5} - 4^3\sqrt{3} + 11\sqrt{5} - 2^3\sqrt{3}$	6. $\sqrt[2]{6} - \sqrt[2]{6} + 10\sqrt[2]{6}$

Estimación de raíces Cuadradas

¿Cuál es el valor de $\sqrt{6}$?

$$\sqrt{6} \quad \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{6} < 3$$

Para poder calcular $\sqrt{6}$, buscamos las raíces exactas más cercanas a $\sqrt{6}$, en este caso es $\sqrt{4}$ y $\sqrt{9}$, por lo tanto, se encuentra entre 2 y 3 al calcular la raíz respectivamente. Para estimar su valor probaremos multiplicando un número decimal por sí mismo, aproximándonos lo que más podemos.

Entonces,

$$2,1 \cdot 2,1 = 4,41$$

$$2,2 \cdot 2,2 = 4,84$$

$$2,3 \cdot 2,3 = 5,29$$

$$2,4 \cdot 2,4 = 5,76$$

$$2,5 \cdot 2,5 = 6,25$$

Con la última multiplicación nos excedemos del valor 6, por lo tanto, diremos que $\sqrt{6} \approx 2,4$ (se lee la raíz cuadrada de 6 es aproximadamente 2,4).

Ubicación en la recta numérica

Como ya calculamos, $\sqrt{6} \approx 2,4$ ubicaremos este valor en la recta numérica,

Ahora Tú:

VII. Realizar las estimaciones de las siguientes raíces cuadradas.

a) $\sqrt{2} =$	b) $\sqrt{5} =$
c) $\sqrt{7} =$	d) $\sqrt{8} =$
e) $\sqrt{10} =$	f) $\sqrt{35} =$

¿Cómo se ordenan de menor a mayor las raíces no exactas?

Ordena de menor a mayor los siguientes números irracionales:

$$2\sqrt{5}; 4\sqrt{2}; 2\sqrt{3}; 4\sqrt{3}$$

Para ordenar números representados con raíces cuadradas, una técnica apropiada consiste en elevar al cuadrado cada número y ordenarlos según corresponda al orden de los valores obtenidos. Esto se mostrará a continuación:

- $2\sqrt{5} = (2\sqrt{5})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$
- $4\sqrt{2} = (4\sqrt{2})^2 = 4^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 16 \cdot 2 = 32$
- $2\sqrt{3} = (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$
- $4\sqrt{3} = (4\sqrt{3})^2 = 4^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48$

Ordenados los valores obtenidos de menor a mayor

12; 20; 32; 48

Pero ahora escribiendo los números irracionales correspondientes:

$$2\sqrt{3}; 2\sqrt{5}; 4\sqrt{2}; 4\sqrt{3}$$

Ahora Tú:

Ordenar de menor a mayor los siguientes números irracionales:

1) $4\sqrt{5}; 2\sqrt{7}; 5\sqrt{2} =$

2) $3\sqrt{4}; 2\sqrt{7}; 8\sqrt{3} =$

3) $10\sqrt{2}; 6\sqrt{7}; 2\sqrt{9}; 4\sqrt{2} =$

4) $5\sqrt{3}; \sqrt{7}; 4\sqrt{6} =$