Guía para el aprendizaje Nº3

Nombre de alumno/a: ______________________ Curso: __________

Asignatura: **Matemáticas** Nivel: **IV medio**
Unidad: **Álgebra y funciones** Contenido: **Función Exponencial**
Objetivo de aprendizaje: *Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos o situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.*

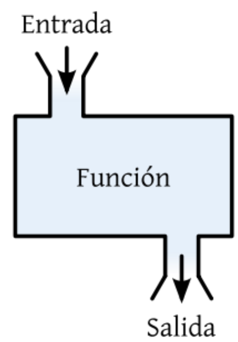
Instrucciones:
En los próximos días deberás resolver la guía, la cual te ayudará para prepararte para la prueba del mes. Debes hacer tus consultas al profesor, a continuación se presentan el correo electrónico para que puedas ponerte en contacto con el docente.

Profesora Nataly González *Nataly.Gonzalez@colegiofernandodearagon.cl*
Profesora Carmen Sánchez *Carmen.Sanchez@colegiofernandodearagon.cl*
Profesor Daniel Rocha *Daniel.Rocha@colegiofernandodearagon.cl*
Profesor Lucas Gómez *Lucas.Gomez@colegiofernandodearagon.cl*
Profesor Patricio Núñez *Patricio.Nuñez@colegiofernandodearagon.cl*
Profesor Rodrigo Paredes *Rodrigo.Paredes@colegiofernandodearagon.cl*

Función Exponencial

Lección I. Funciones

Aprende 1. ¿Qué es una función?

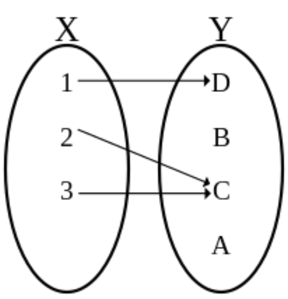


Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto B.

Se puede comparar una función con una máquina. Si x es un elemento del dominio de la función f, entonces cuando “pasa” por la máquina, esta produce la salida de f(x), de acuerdo con la regla de la función.

Dados dos conjuntos A y B, llamamos función a la relación de A con B, donde ***todos*** *los elementos de A tienen a lo sumo una imagen en B, es decir* ***una imagen o ninguna****.*

Aprende 2. Definiciones



A. Dominio: El dominio (conjunto de partida), grupo de todos los valores para los cuales la función estad definida

{Todos los valores en el grupo X (1, 2, 3)}

B. Codominio: El codominio (conjunto de llegada), grupo de todos los valores para los cuales la función estad definida

{Todos los valores en el grupo Y (A,B,C,D)}

C. Recorrido: Grupo de todos los elementos que toma la variable dependiente en el grupo de llegada.

{Solo los valores “resultantes” (C,D)}

D. Preimagen: Las preimágenes son los elementos del dominio, que pueden “ser parte” de la función.

{1 es preimagen de D}

E. Imagen: La imagen de un elemento es la solución que se obtiene al ingresar una preimagen en la función.

{D es la imagen de 1}

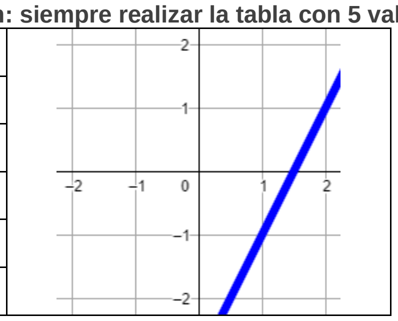
Aprende 3. <u>¿Cómo graficar una función?</u>

El grafico de una función dada su expresión algebraica, se puede hacer "punto a punto". Para ello es necesario construir una tabla de valores. En la cual se presenten los valores independientes (usualmente x) y dependientes de la función (usualmente y).

Ejemplo 1. **Bosqueje el grafico de la función $f(x) = 2x - 3$**

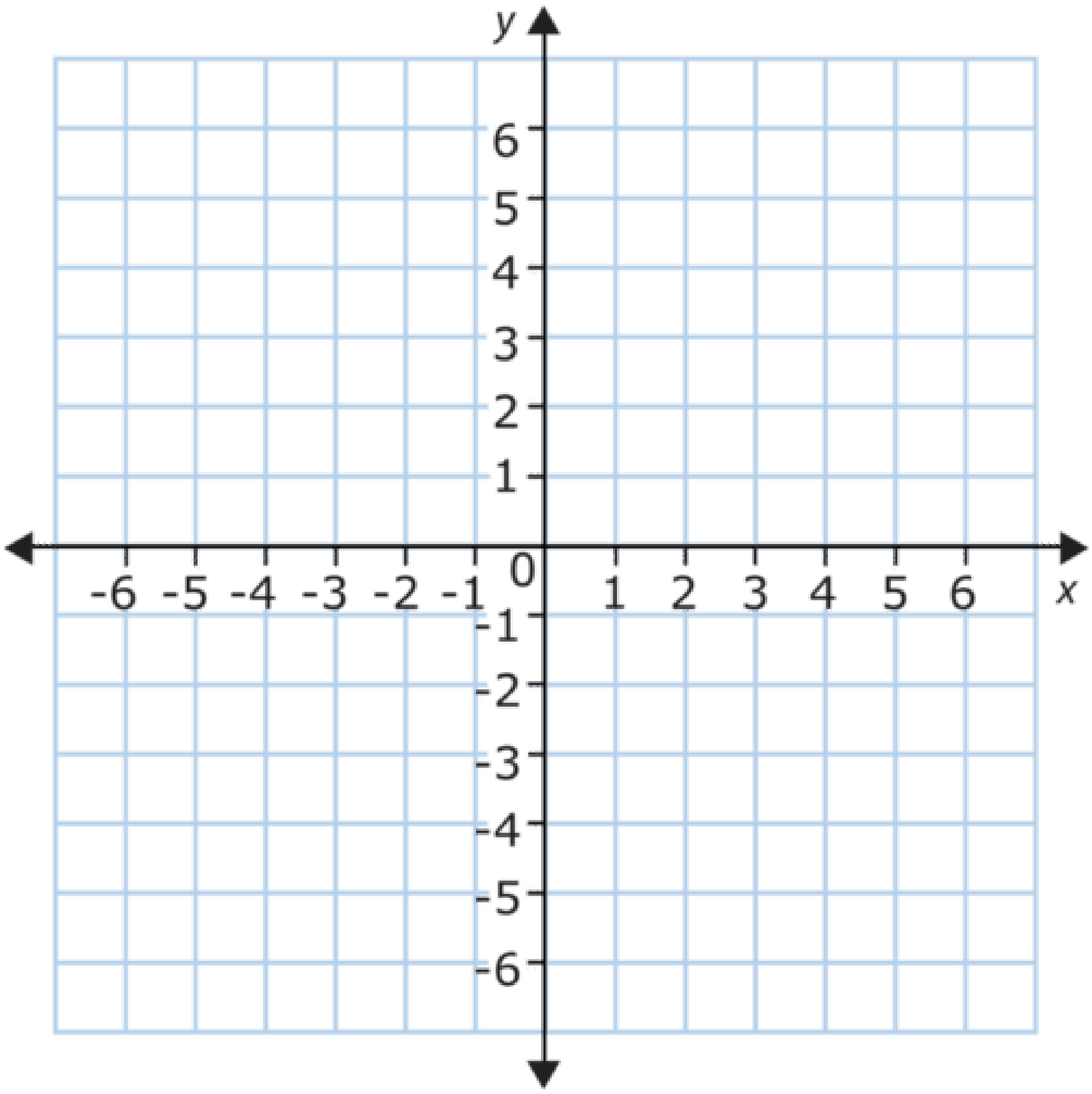
Recomendación: siempre realizar la tabla con 5 valores

x	f(x)
-2	-7
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1



Resuelve 1. *Grafica las siguientes funciones en el plano cartesiano.*

1. $f(x) = x + 2$
2. $f(x) = x - 2$
3. $f(x) = 2x - 2$
4. $f(x) = -x + 1$
5. $f(x) = x^2 - 3$
6. $f(x) = -x^2 - 1$
7. $f(x) = \frac{x+4}{2}$



x	f(x)

x	f(x)

x	f(x)

x	f(x)

x	f(x)

x	f(x)

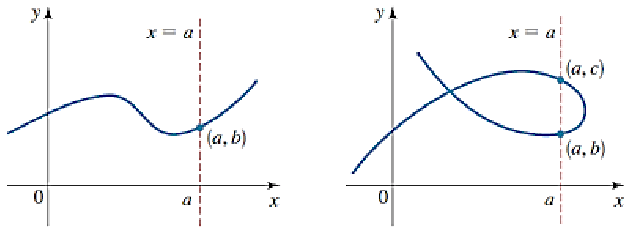
x	f(x)

Lección II. Estudio del aspecto gráfico de la función

Aprende 4. Prueba de la recta vertical

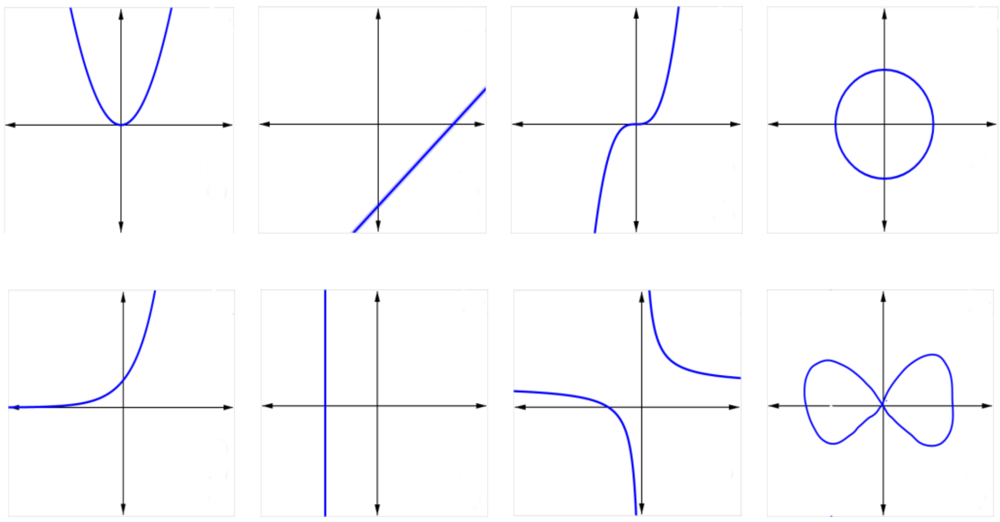
Una curva en el plano cartesiano representa una función si y solo si, cualquier recta vertical corta el grafico como máximo en un solo punto.

Ejemplo 2.

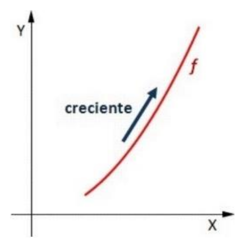


Gráfica de una función — No es una gráfica de una función

Resuelve 2. *Marca las imágenes que representan una función.*

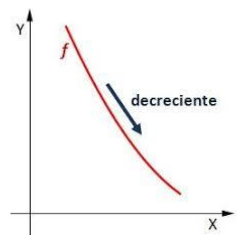


Aprende 5. Crecimiento o decrecimiento



A. Función creciente: Una función f se dice que es creciente en un intervalo I de su dominio si: la imagen anterior es menor que la imagen posterior.

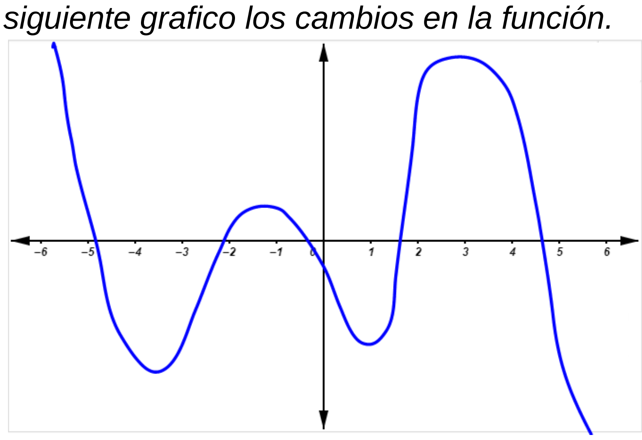
$$\forall\ a, b\ \in I : [a < b \Rightarrow f(a) < f(b)]$$



B. Función creciente: Una función f se dice que es creciente en un intervalo I de su dominio si: la imagen anterior es mayor que la imagen posterior.

$$\forall\ a, b\ \in I : [a < b \Rightarrow f(a) > f(b)]$$

Resuelve 3. *En el siguiente grafico los cambios en la función.*



Aprende 6. Puntos de corte

A. Intersección con el eje X

Para determinar los puntos de cortes de la curva donde intersecta al eje X, se debe trabajar con Y=0, y así se resuelve la ecuación resultante. A estos puntos se les conoce como “Ceros de la función”

Ejemplo 1. **Hallar los puntos donde la función $f(x) = 2x - 8$ intersecta al eje X.**

$$2x - 8 = 0$$
$$2x = 8$$
$$x = \frac{8}{2} = 4$$

Por tanto el punto donde la función corta al eje X es en P(4,0)

B. Intersección con el eje Y

Para determinar los puntos de cortes de la curva donde intersecta al eje Y, se debe trabajar con X=0, y así se resuelve la ecuación resultante.

Ejemplo 2. **Hallar los puntos donde la función $f(x) = 2x - 8$ intersecta al eje y.**

$$f(x) = 2(0) - 8$$
$$f(x) = -8$$

Por tanto el punto donde la función corta al eje Y es en P(0,-8)

Resuelve 4. *Encuentra los cortes en el eje X y el eje Y de las siguientes funciones.*

1. $f(x) = 5x + 15$

2. $f(x) = x - 3$

3. $f(x) = \frac{-2x+18}{6}$

4. $f(x) = 2x^2 - 4x$

5. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

6. $f(x) = (x - 3)(x + 2)$

7. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Lección III. Ecuación exponencial

Es decir potencias en cuyos exponentes son expresiones en las que aparece la incógnita, x. En esta sección resolveremos ecuaciones exponenciales sin usar logaritmos.

Resuelve 5. *Trabajo con potencias y exponentes: resuelve cada uno de los ejercicios utilizando las propiedades de las potencias que ya conoces*

1. $3^5 =$
2. $(-5)^3 =$
3. $-2^6 =$
4. $4^{-2} =$
5. $16^{\frac{1}{2}} =$
6. *Si* $4^x = 64$ *entonces ¿Cuál es el valor de* $\boldsymbol{x}$*?*

7. *Si* $3^x = \frac{1}{27}$ *entonces ¿Cuál es el valor de* $\boldsymbol{x}$*?*

Lección IV. Función exponencial

El estudio realizado hasta ahora ha contemplado solamente funciones relativamente simples. En esta sección estudiaremos la función exponencial y luego su función inversa, la función logarítmica. Observaras como estas funciones nos permitirá describir crecimientos y decrecimientos en distintas situaciones. Se presenta como:

$$f(x) = a^x$$

Aprende 7. Gráfico de función exponencial

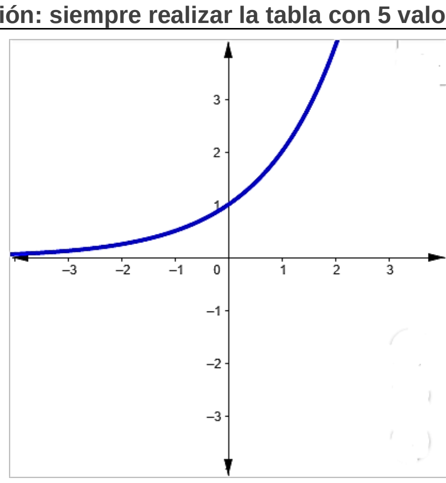
La función exponencial es una función del tipo $f(x)=a^x$, siendo a un número real distinto de 1.

A. Primer Caso: a > 1 (base mayor a 1)

Ejemplo 1. **Bosqueje el grafico de la función $f(x) = 2^x$**

Recomendación: siempre realizar la tabla con 5 valores

x	f(x)
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

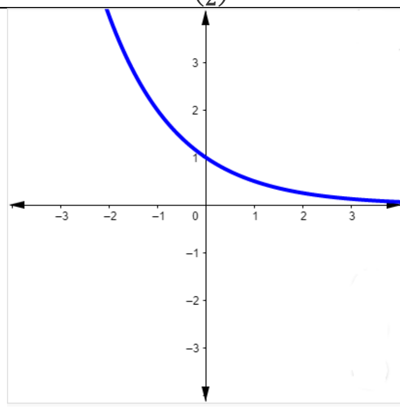


Dom: todos los reales
Rec: todo número mayor a 0
Función creciente

B. Segundo Caso: 0 < a < 1 (base, número racional entre 0 y 1)

Ejemplo 2. **Bosqueje el gráfico de la función** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	f(x)
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

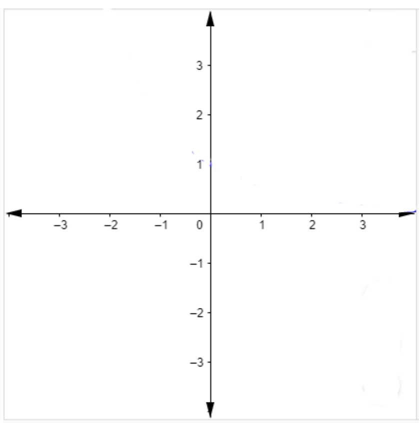


Dom: todos los reales
Rec: todo número mayor a 0
Función decreciente

Resuelve 6. *Realiza el bosquejo de las siguientes funciones*

1. $f(x) = (2)^x - 2$

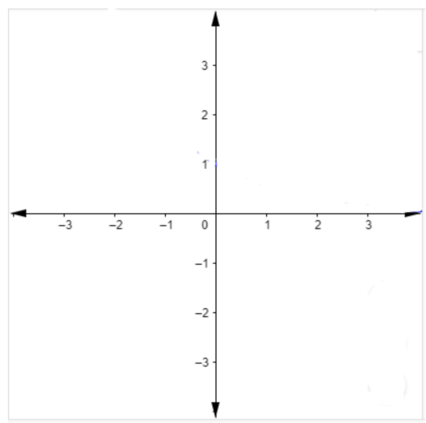
x	f(x)



Dom:
Rec:
Función:

2. $f(x) = (2)^x + 1$

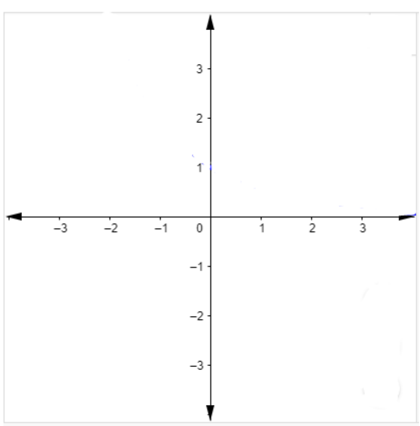
x	f(x)



Dom:
Rec:
Función:

3. $f(x) = -2^x$

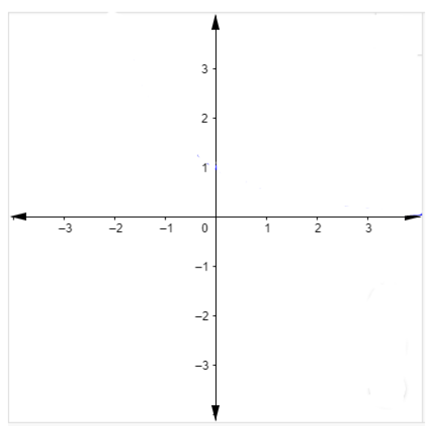
x	f(x)



Dom:
Rec:
Función:

4. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

x	f(x)



Dom:
Rec:
Función:

Aprende 8. Modelamiento con funciones exponenciales

A. Interés compuesto

A continuación estudiaremos el interés compuesto como una función exponencial

$$C_f = K \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^x$$

Donde: C_f = *Capital Final después de x tiempo*
K = *Capital inicial*
r = *Tasa de interés*
x = *tiempo*

Ejemplo 1. **Un banco tiene una tasa de interés de un 8%, Juan ahorró en su cuenta $500.000 cuanto tendrá al quinto año, sin haber hecho otro deposito.**

$$f(x) = 500.000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5$$

$$f(x) = 500.000 \cdot (1{,}08)^5$$

$$f(x) = 500.000 \cdot 1{,}47$$

$$f(x) = 735.000$$

Por tanto Juan al quinto año tendrá en su cuenta de ahorro $735.000

B. Crecimiento exponencial

A continuación estudiaremos el crecimiento exponencial de distintas poblaciones o sucesos.

$$P_{(x)} = P_0 \cdot C^x$$

Donde: $P_{(x)}$ = *Población final después de x tiempo*
P_0 = *Punto 0 o población inicial*
C = *Tasa de crecimiento*
x = *Tiempo transcurrido*

Ejemplo 2. **Una población de bacterias se duplica cada 3 horas, ¿Cuántas bacterias habrá al transcurrir de 1 día, si inicio con 500?**

Primero se establece cuantas veces podrán reproducirse, ya que son 24 horas, y cada 3 horas se produce el cambio, entonces el cambio se produjo 8 veces.

$$f(x) = 500 \cdot (2)^{24/3}$$

$$f(x) = 500 \cdot (2)^8$$

$$f(x) = 500 \cdot 256$$

$$f(x) = 128.000$$

Por tanto al cabo de un día completo, la población de bacterias será de 128.000

Resuelve 7. *Lee atentamente cada uno de los problemas y responde.*

1. *Pedro decidió ahorrar para comprar su casa, abrió su cuenta de la vivienda en un banco con una tasa de interés mensual de 2%. Y su primer y único deposito fue $1.000.000. Cuánto dinero tendrá en la cuenta al cabo de 7 años.*

2. *Rosa quiere comprar un refrigerador que cuesta $469.000, decide pagar con tarjeta de crédito. Tiene dos opciones:*

- *Tarjeta Bella: con una tasa de interés de 3% mensual.*
- *Tarjeta Pley: con una tasa de interés de 32% anual.*

¿Cuál debe escoger pensando que pagará en 6 cuotas?

3. *Una población de bacterias se duplica cada 2 horas, si en un inicio se tenía 1 bacteria ¿Cuántas bacterias habrá al transcurrir 8 horas?*

4. *Se ha estudiado una nueva enfermedad, el estudio indica que en un día el "paciente 0" contagia a otras 2 personas. ¿Cuántas personas estarán contagiadas al cabo de 6 días?*

5. *Romeo y Julieta han dejado de ser novios, Julieta ante su enojo decidió romper la última carta que recibió de su amado. Por ello cada día cortará a la mitad la carta, hasta llegar a los 1000 trozos de la carta original. ¿Cuántos días demorará Julieta en lograr su meta?*