



## MATEMÁTICA II MEDIO Guía Nº4: Junio

Nombre: \_\_\_\_\_ Curso: IIº \_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_ / 6 / 2021

### A) SINTESIS DE CONTENIDO: ANÁLISIS DE POBLACIONES ( OA12 )

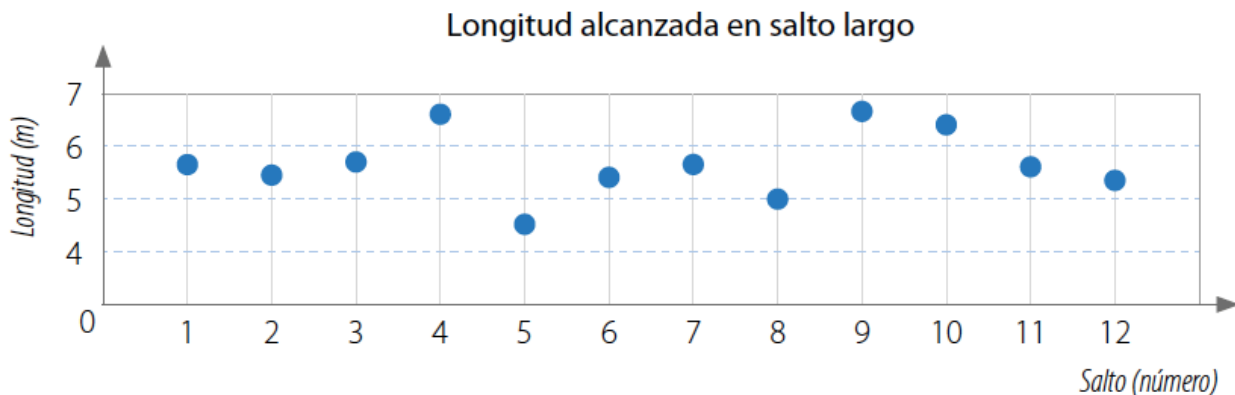
#### Ejercicios resueltos:

**Ejemplo 1:** Para analizar el desempeño de un atleta que practica salto largo se representan en un gráfico

las longitudes en metros que alcanza en doce saltos diferentes:

5,8 5,7 5,9 6,7 4,7 5,5 5,6 5,0 6,6 6,5 5,5 5,4

Registra los datos con un punto en las longitudes alcanzadas.



De la gráfica se concluye que la dispersión de sus saltos es amplia y que la mayoría de ellos alcanzan entre los 5 y 6 metros.

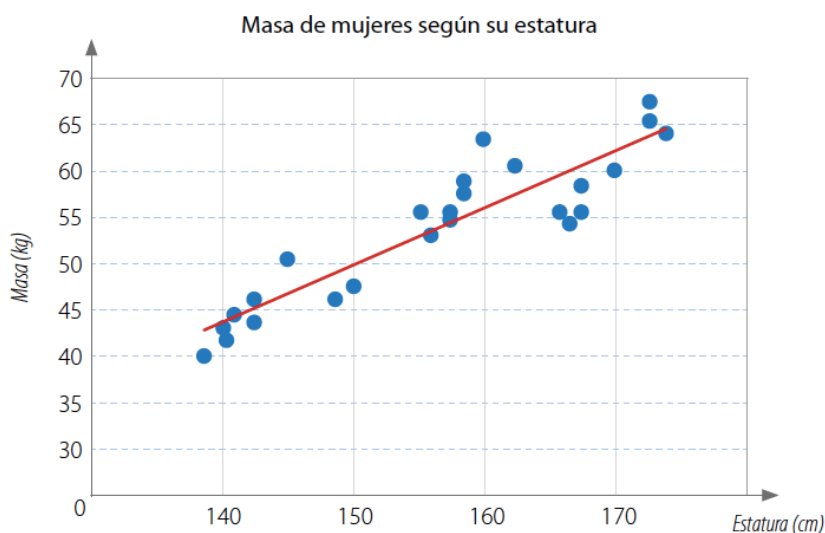
Una **nube de puntos** corresponde a la gráfica de dispersión de un conjunto de pares ordenados en el plano cartesiano, en la que las coordenadas de cada punto corresponden a una variable cuantitativa en estudio.



**Ejemplo 2:** Un grupo de estudiantes quieren determinar de qué manera se relacionan las variables estatura y masa.

Para analizar la relación que existe entre ellas, toman los datos de 24 mujeres que se atienden en un centro médico.

Al representar los datos en un gráfico, resulta lo siguiente:

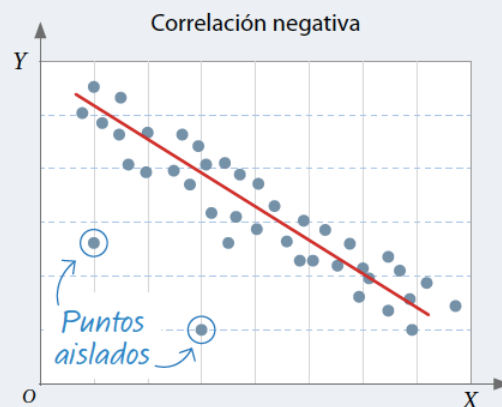
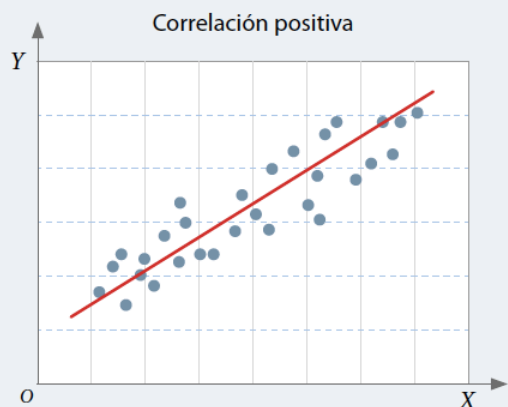


Una **variable** puede ser cuantitativa o cualitativa.

- Es **cuantitativa** cuando sus valores son numéricos, por ejemplo, la estatura o la masa corporal. Considera que en esta lección se trabajarán valores racionales.
- Es **cualitativa** si sus valores son categorías no numéricas, como el color de ojos o de pelo.

Al trazar una línea recta, se puede observar una tendencia lineal, es decir, que las variables se relacionan, aproximadamente, de manera proporcional.

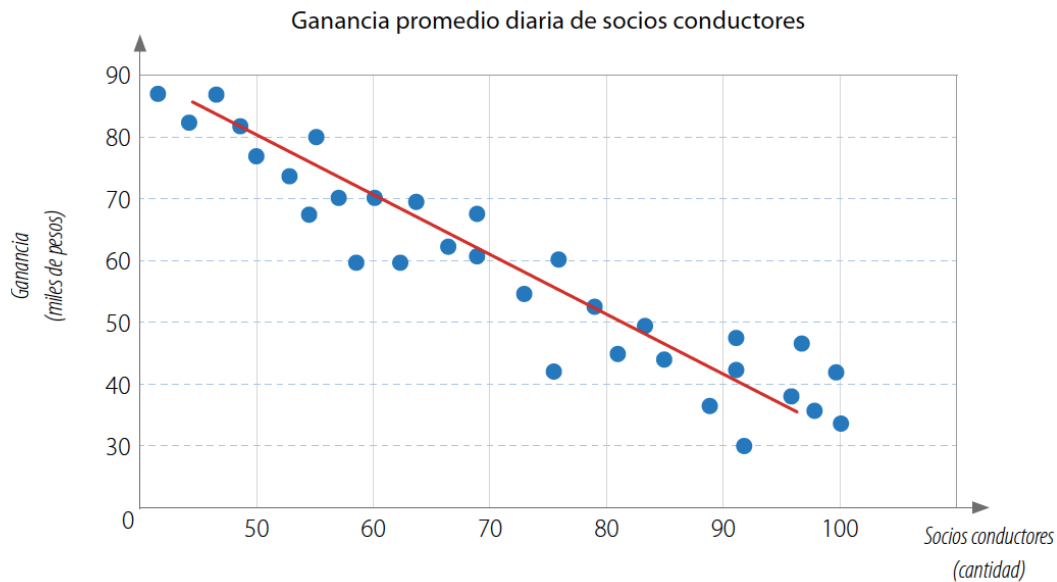
- Cuando una nube de puntos tiene una tendencia semejante a una recta o están en torno a una recta, se dice que las variables están **correlacionadas linealmente**.
- Dos variables se **correlacionan de manera positiva** si los valores de ambas aumentan o disminuyen simultáneamente.
- Dos variables se **correlacionan de manera negativa** cuando los valores de una variable aumentan y los de la otra disminuyen.
- Si en el gráfico se muestran algunos puntos con un comportamiento muy distinto al de los demás, se dice que son **puntos aislados** o **puntos atípicos**.





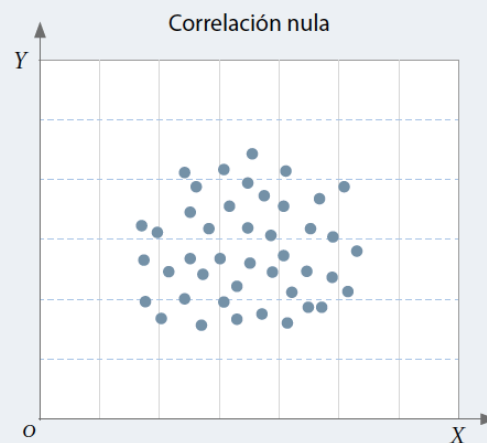
**Ejemplo 3:** Una empresa de transporte formada por socios conductores realiza un estudio sobre las ganancias que alcanzan en promedio al ir aumentando la cantidad de socios en el tiempo.

Al representar los datos en un gráfico, se obtiene lo siguiente:



A partir de la gráfica, se concluye que al aumentar la cantidad de socios conductores, la ganancia disminuye.

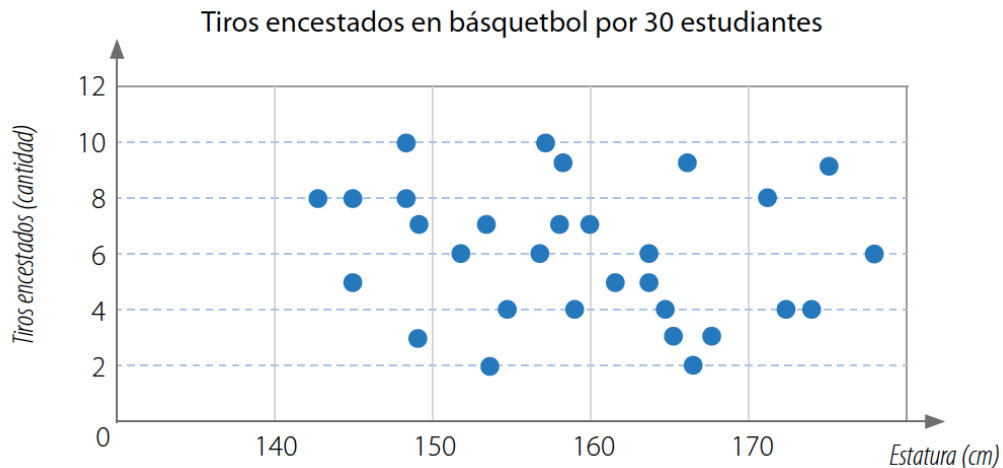
Dos variables tendrán una **correlación nula** si no es clara la relación entre las variables, es decir, no presentan una correlación positiva o negativa. En estos casos la nube de puntos que corresponde a la relación entre las variables no se puede representar con una línea recta.





**Ejemplo 3:** Un grupo de estudiantes aseguran que una mayor estatura no garantiza un mejor desempeño en la ejecución de un tiro libre en el básquetbol. Para demostrarlo, sugirieron realizar un estudio considerando una muestra de 30 estudiantes, de diferentes estaturas, y les propusieron lanzar diez tiros libres a cada uno.

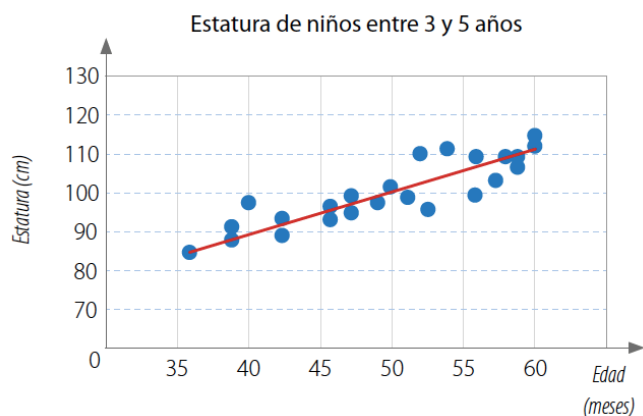
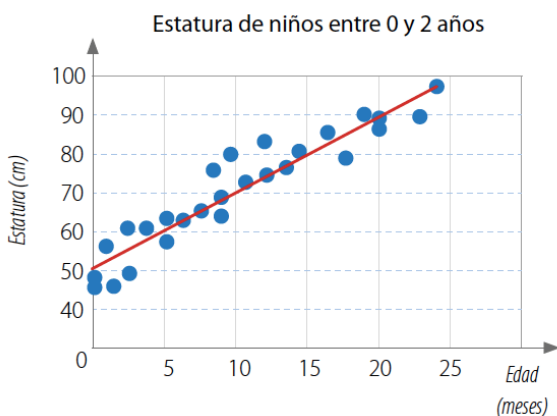
Registraron los resultados en el siguiente gráfico:



Los estudiantes señalan que como no existe correlación positiva ni negativa, se confirma que una mayor estatura no garantiza un mejor desempeño en la ejecución de tiro libre.

**Ejemplo 5:** Los siguientes gráficos presentan la relación entre la edad y la estatura de dos grupos de niños.

Escribe algunas conclusiones a partir de los datos.



En ambos grupos se presenta una correlación positiva, ya que las dos rectas son crecientes. Además, en el caso de los niños entre 0 y 2 años, la estatura aumenta de manera más rápida.



**Ejemplo 6:** En la siguiente tabla se muestra la cantidad de personas inscritas en un concurso de baile regional.

Personas inscritas en concurso de baile regional	
Participante	Personas inscritas (cantidad)
Hombre en zona rural	12
Hombre en zona urbana	54
Mujer en zona rural	16
Mujer en zona urbana	48

Representa la tabla de frecuencias en una tabla de doble entrada y determina conclusiones a partir de ella.

Para representar la tabla de frecuencias en una tabla de doble entrada puedes seguir estos pasos:

1º Identifica las características o variables que se deben relacionar. En este ejemplo, las características son el género y la zona donde se habita.

2º Construye la tabla con las variables y los datos correspondientes.

Personas / Zona	Rural	Urbana
Hombre	12	54
Mujer	16	48

3º Escribe conclusiones a partir de la tabla.

En el estudio se consideró a 64 mujeres y 66 hombres. La cantidad de personas inscritas de la zona rural es 28, mientras que los participantes de la zona urbana es 102. Tanto en hombres como en mujeres hay más concentración de personas inscritas de la zona urbana.

Una **tabla de doble entrada** o **tabla de contingencia** es aquella que sirve para contar la cantidad de individuos u objetos con dos tipos de características o variables cualitativas.

Una tabla de doble entrada está conformada por filas y columnas. Las filas están formadas por las categorías de una variable, y las columnas, por las de la otra variable. En cada una de las casillas formadas se ubica la cantidad de datos que tienen ambas características simultáneamente.



## Comparación de dos poblaciones

**Ejemplo 7:** De una población se extrae una muestra de 12 hombres y 12 mujeres, a los cuales se les preguntó su edad y se les midió el IMC (índice de masa corporal). Los datos se registraron en las siguientes tablas.

### MUJERES

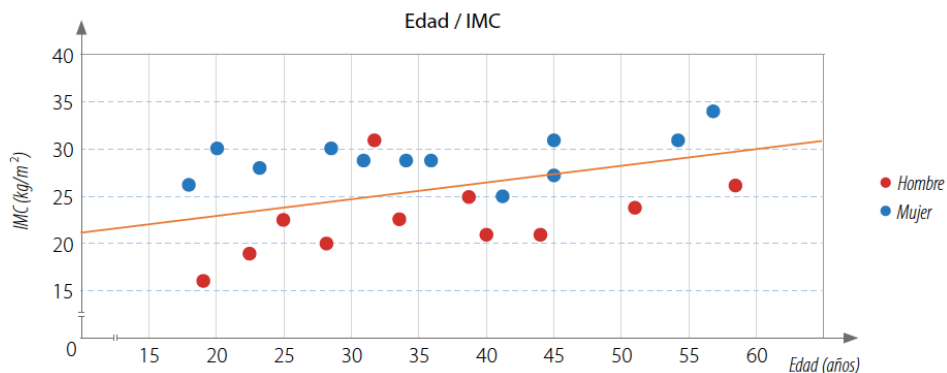
Edad (años)	34	45	18	23	29	36	57	20	45	31	54	41
IMC (kg/m <sup>2</sup> )	29	31	27	28	30	29	34	30	27	29	31	25

### HOMBRES

Edad (años)	22	39	25	40	28	32	51	33	44	19	58	51
IMC (kg/m <sup>2</sup> )	19	25	22	21	20	31	24	22	21	16	26	24

Construye la nube de puntos con los datos y luego determina si existe correlación.

La nube de puntos queda como se muestra a continuación. Puedes trazar una recta de forma intuitiva que separe ambas nubes de puntos para compararlas.



En este caso, se observa que el IMC de las mujeres de la muestra es, en general, mayor que el de los hombres. para las mismas edades. Se concluye que existe correlación lineal.

**Ejemplo 8:** Una cadena de supermercados quiere conocer la conformidad de los clientes en relación con la cantidad de personas que están en la tienda al momento de su compra. Para ello, realiza un estudio en dos sucursales con las mismas características.

En ambas sucursales se eligen clientes al azar para pedirles que califiquen, entre 1 y 7, su conformidad Con respecto a la atención recibida durante su compra.

Los resultados se registran en las siguientes tablas:



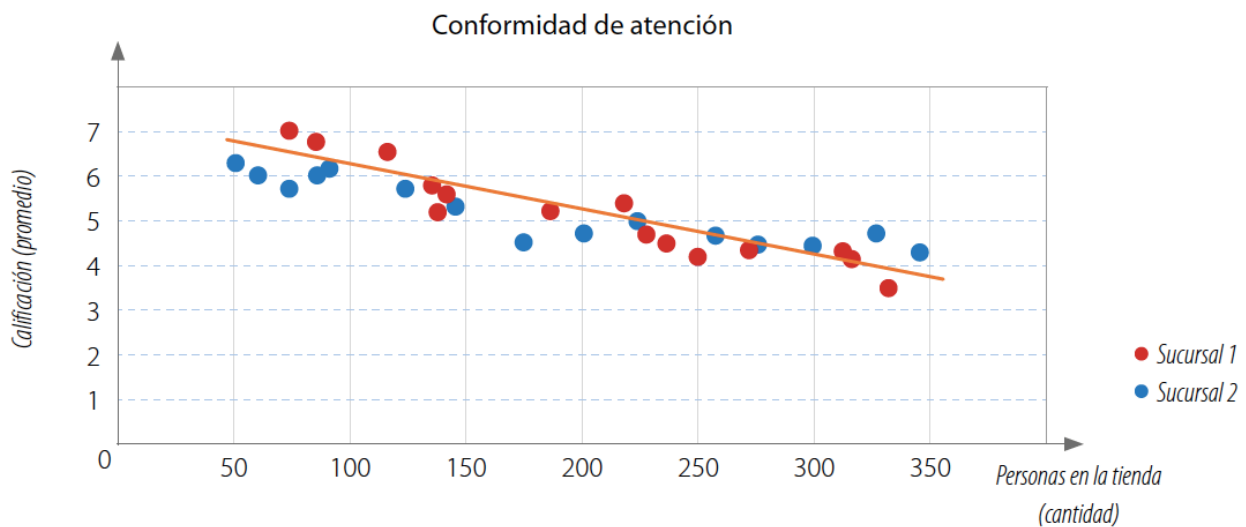
### SUCURSAL 1

Personas en la tienda (cantidad)	75	86	120	145	138	142	185	215	230	312	315	330
Calificación (promedio)	7,0	6,8	6,5	5,5	5,7	5,2	4,6	4,8	5,0	4,5	4,4	4,0

### SUCURSAL 2

Personas en la tienda (cantidad)	50	60	85	75	90	125	148	175	210	300	321	345
Calificación (promedio)	6,3	6,5	7,0	5,9	6,1	5,9	5,3	4,6	4,7	4,5	4,7	5,1

Construye un gráfico con los datos y determina algunas conclusiones.



Conclusiones:

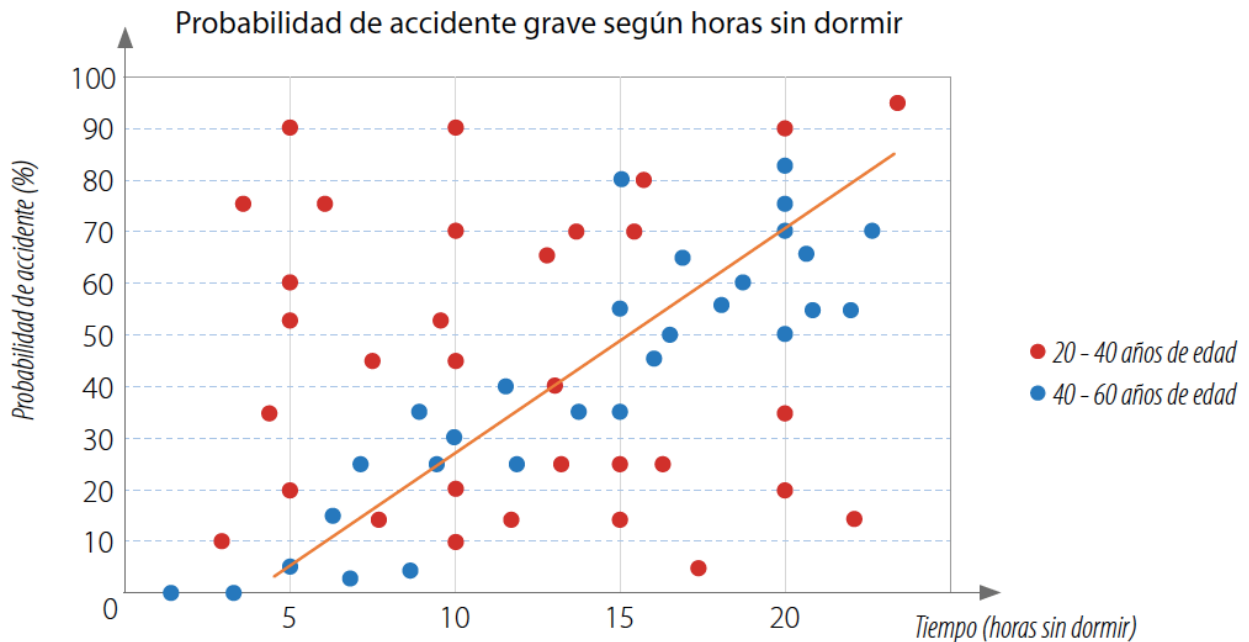
- En ambos casos la correlación es negativa, pues en las dos sucursales disminuye la conformidad de sus clientes cuando aumenta la cantidad de personas en la tienda.
- Al incrementarse la cantidad de clientes, la sucursal 2 tiene un desempeño más estable en cuanto a la atención que la sucursal 1, ya que la inclinación de la línea es menor.

Una **nube de puntos** permite efectuar comparaciones entre dos poblaciones cuando se relacionan dos **variables cuantitativas**. Para esto, basta con representar los datos de ambas poblaciones en el mismo gráfico, con distintos colores para diferenciarlas, y con la misma escala.



**Ejemplo 9:** Una empresa que realiza diferentes estudios sobre seguridad vial pretende medir la capacidad de reacción de un grupo de conductores. Para ello, conforma dos grupos: uno de entre 20 y 40 años y el otro de entre 40 y 60 años. El experimento consiste en simular la conducción en una pantalla después que han pasado algunas horas sin dormir, y en cierto momento exponerlos a una situación límite de riesgo y analizar la reacción del conductor.

1º Analiza los resultados que se presentan en el gráfico



2º establece algunas conclusiones.

- El grupo de entre 40 y 60 años revela un desempeño lineal, y la correspondencia entre las variables se correlaciona de forma positiva.
- En el grupo de entre 20 y 40 años no se observa una tendencia lineal, por lo cual la nube de puntos presenta una correlación nula.
- Al grupo de entre 40 y 60 años le afectan más las horas sin dormir, por tanto, deben procurar conducir descansados. El buen desempeño de este grupo cuando están descansados se puede deber a la experiencia en la conducción y a la prudencia que suelen tener.



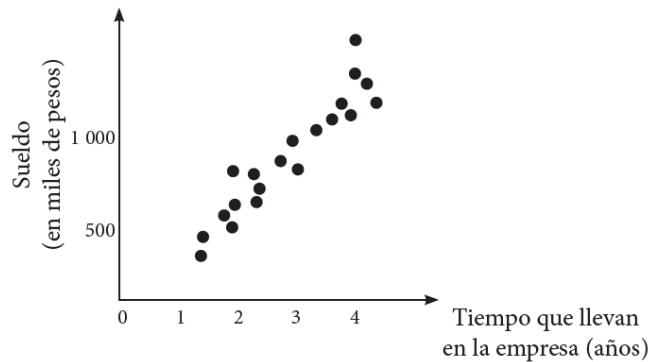


**Instrucciones:** A continuación usted encontrará preguntas de selección múltiple. Lea atentamente, resuelva y **ENCIERRE EN UN CÍRCULO** la letra de la alternativa correcta.

1

OA12

En una empresa trabajan 20 personas de distintas edades. En el siguiente gráfico se registró el sueldo y el tiempo que llevan en la empresa:



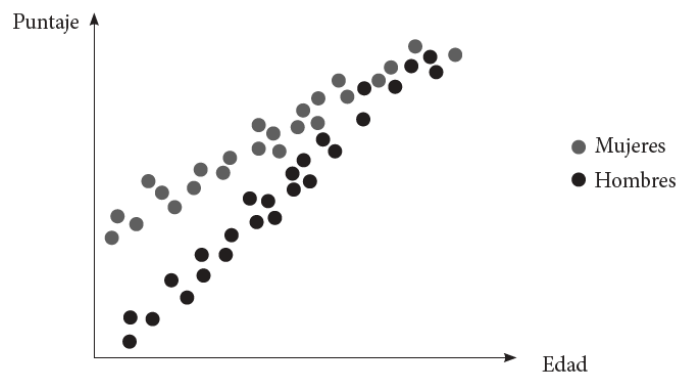
¿Qué tipo de relación hay entre el sueldo de un trabajador y los años que lleva en la empresa?

- a) Ninguna.
- b) Lineal débil.
- c) Lineal positiva.
- d) Lineal negativa.

2

OA12

A un grupo de hombres y mujeres de distintas edades se les tomó una prueba. Los resultados se muestran a continuación:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones siempre es correcta?

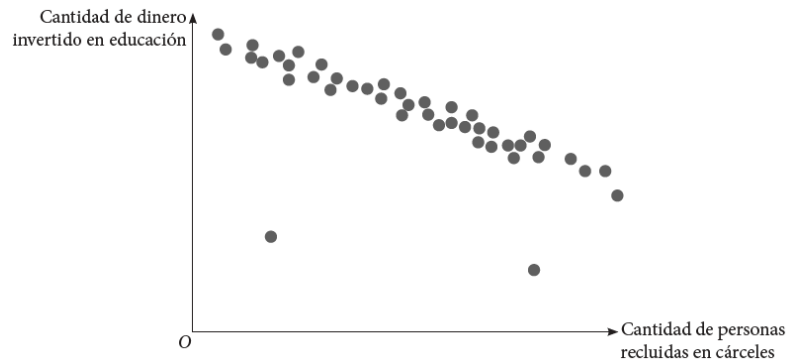
- a) Mujeres y hombres tuvieron buenos resultados
- b) Los hombres y las mujeres tienen los mismos resultados.
- c) Fueron más las mujeres que los hombres que rindieron la prueba.
- d) A mayor edad, la diferencia entre los puntajes de mujeres y hombres disminuye.



3

OA12

En el siguiente gráfico cada punto representa un país con respecto a las variables del gráfico



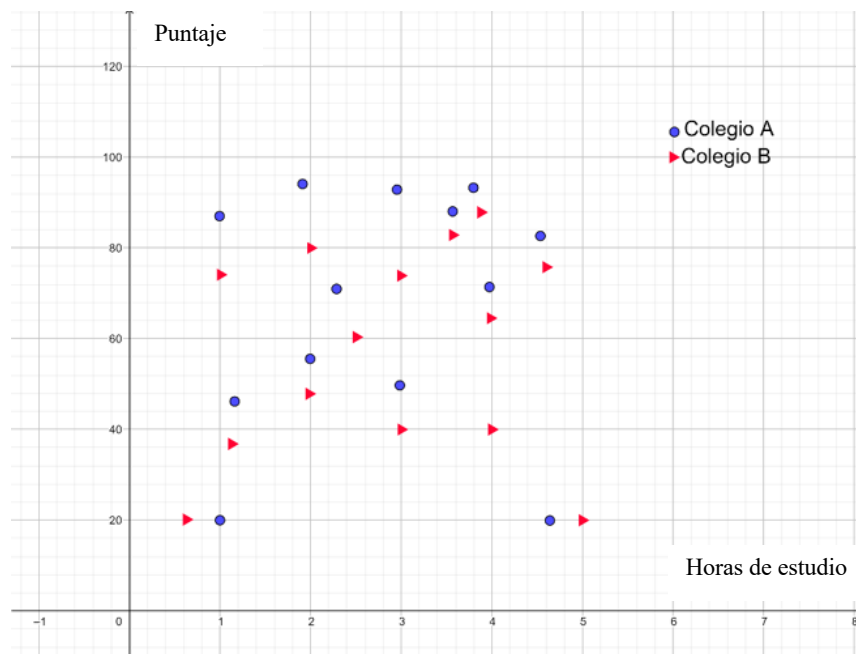
Considerando la relación que muestra el conjunto de países, ¿cuántos países tienen un comportamiento muy distinto al resto?

- a) 2
- b) 4
- c) 41
- d) 43

4

OA12

Observe el siguiente gráfico y determine que afirmación es **correcta**.



- a) Los alumnos del colegio A tienen mejor rendimiento en menos horas de estudio.
- b) Los alumnos del colegio B tienen mejor rendimiento en menos horas de estudio.
- c) La relación entre horas de estudio y puntaje de la prueba no sigue tendencia alguna.
- d) No existen puntos aislados en la relación horas de estudio y puntaje.

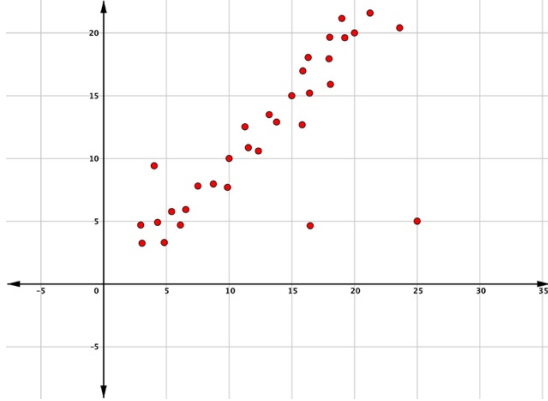


5

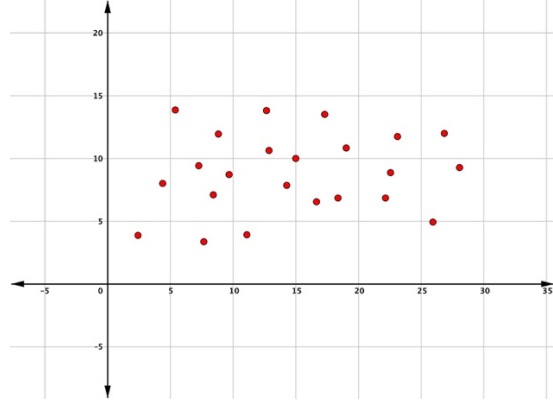
OA12

¿Cuál es la nube de puntos en donde se puede establecer una mejor relación lineal?

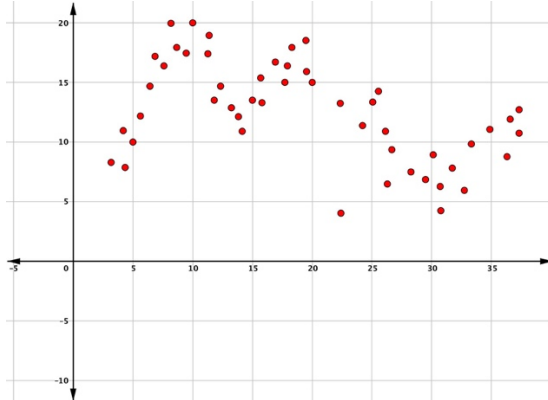
a)



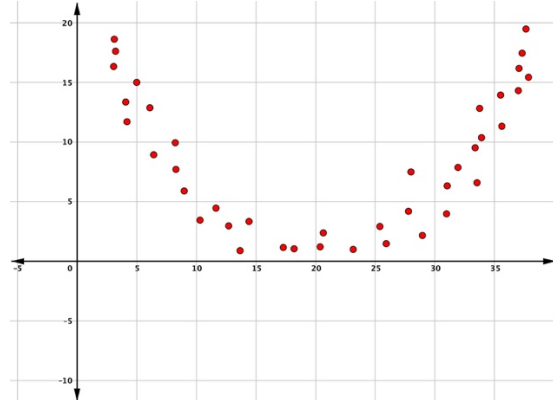
b)



c)



d)



6

OA12

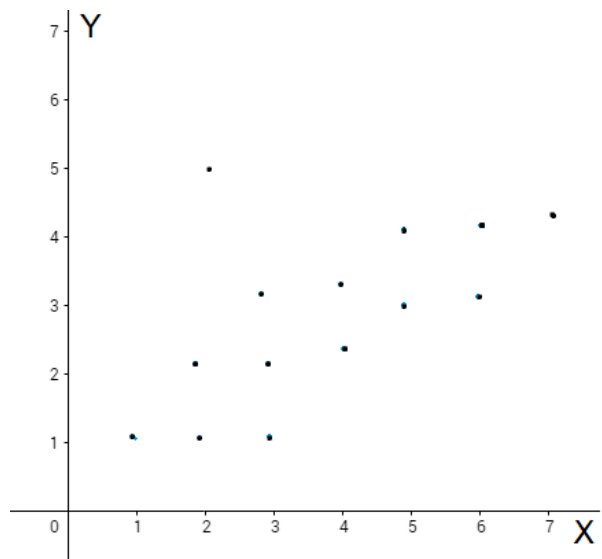
Según el gráfico adjunto ¿cuáles son las coordenadas de un punto aislado?

a) (5, 3)

b) (2, 3)

c) (3, 2)

d) (2, 5)



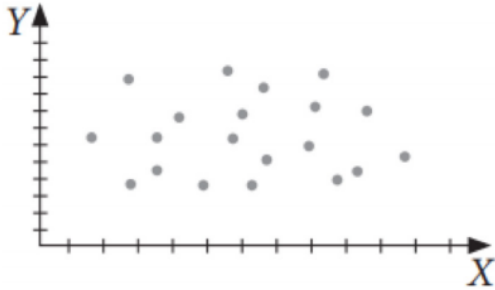


7

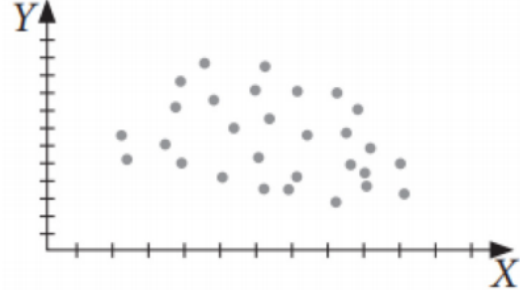
OA12

¿Cuál de los siguientes gráficos presenta algún grado de correlación?

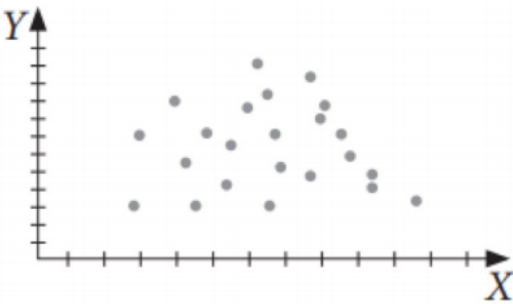
a)



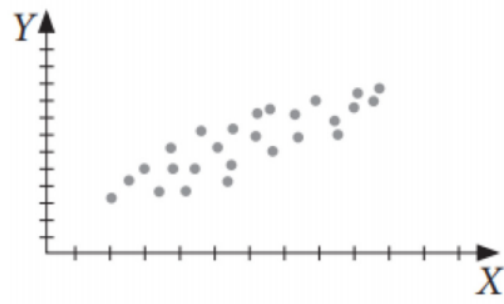
b)



c)



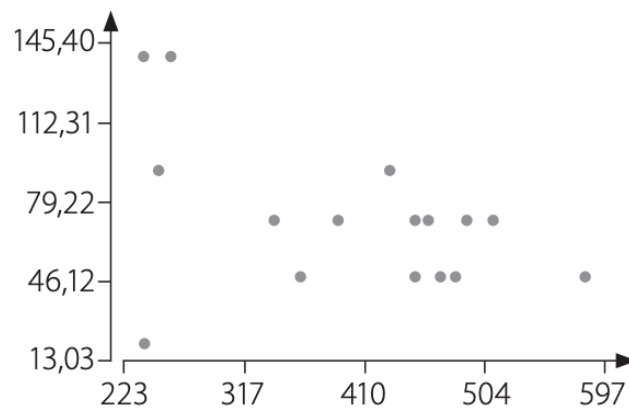
d)



8

OA12

¿Qué tipo de correlación se presenta en la siguiente nube de puntos?



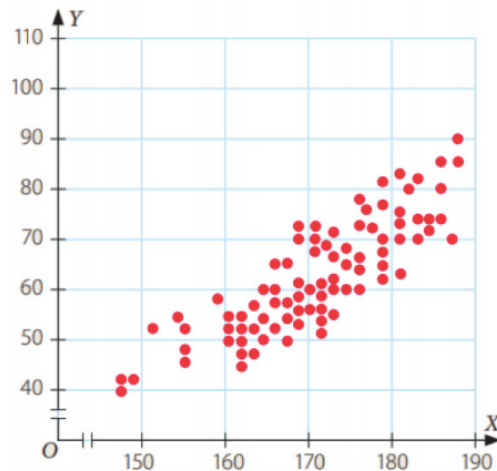
- a) Atípica
- b) Positiva
- c) Negativa
- d) No existe correlación



9

OA12

Observa el siguiente gráfico:



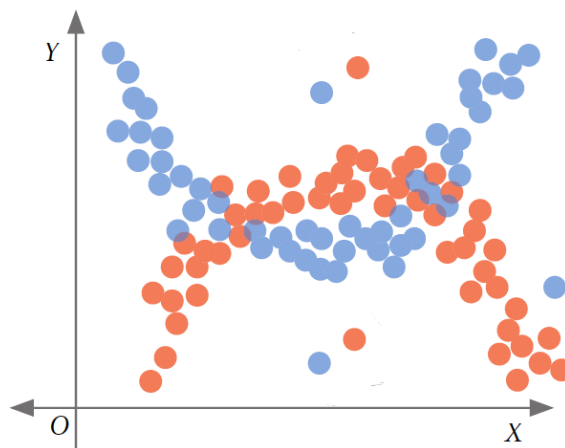
¿Qué tipo de correlación se presenta en la nube de puntos anterior?

- a) Atípica
- b) Positiva
- c) Negativa
- d) No existe correlación

10

OA12

Determina si existe o no correlación para los puntos azules y rojos.

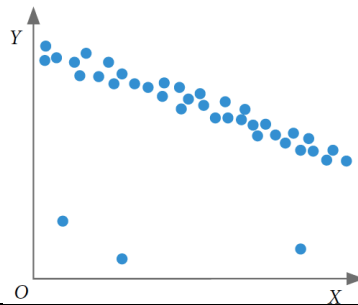


- a) Ambos puntos presentan una correlación positiva. Se puede trazar una recta creciente que muestra claramente la correlación.
- b) No hay correlación positiva ni negativa para ningún color.
- c) La correlación para los puntos azules es positiva. Para los rojos es nula.
- d) Ambos puntos presentan una correlación Negativa.



**Utiliza la siguiente información para responder las preguntas 11 y 12**

Analice la siguiente nube de puntos



11

OA12

¿Qué tipo de relación existe entre las variables en la nube de puntos anterior?

- a) Existe una relación lineal y es positiva.
- b) Existe una relación lineal y es negativa.
- c) Existe una relación lineal y es positiva.
- d) No hay una relación lineal.

12

OA12

¿ Existen puntos atípicos?

- a) Hay 2 puntos atípicos.
- b) Hay 3 puntos atípicos
- c) Hay 10 puntos atípicos
- d) No hay una relación lineal.

13

OA12

Un grupo de 35 estudiantes marcan en la pizarra un punto de acuerdo con la cantidad de horas utilizadas para el estudio de una prueba de matemática. ¿Qué conclusiones podrías plantear?



- a) Se puede concluir que la minoría de los estudiantes se prepararon entre 5 y 6 horas.
- b) Se puede concluir que la mayoría a de los estudiantes se prepararon entre 9 y 10 horas.
- c) Se puede concluir que la 5 estudiantes se prepararon entre 1 y 3 horas.
- d) Se puede concluir que la mayoría de los estudiantes se prepararon entre 4 y 6 horas



14

OA12

¿Qué es un punto atípico en una nube de puntos?

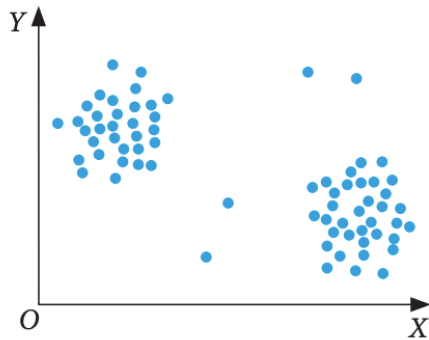
- a) Un punto que presenta un comportamiento similar a los demás que forman la nube.
- b) Un punto que presenta un comportamiento diferente a la mayoría de los que forman la nube.
- c) Un punto que está sobre la recta al trazarla en la nube de puntos.
- d) Un punto que no pertenece a la recta al trazarla en la nube de puntos.

15

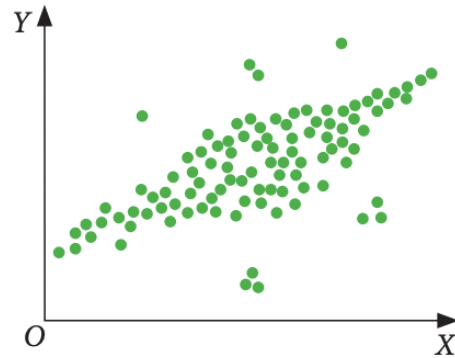
OA12

¿Cuál de las siguientes nubes de puntos presenta una correlación lineal negativa?

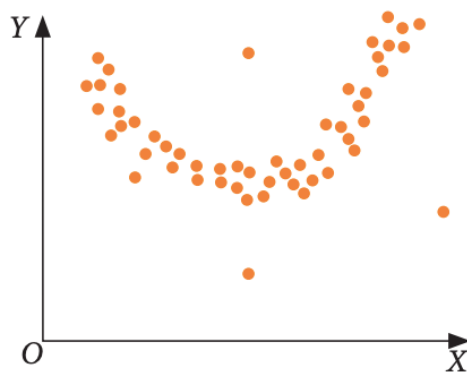
a)



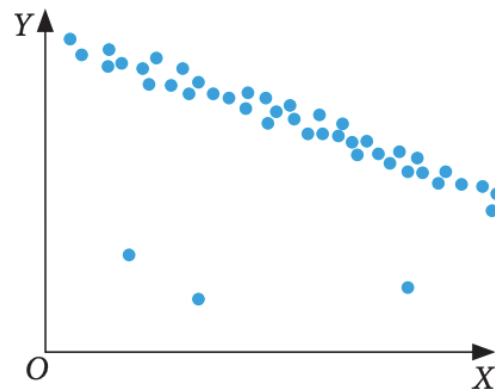
b)



c)



d)







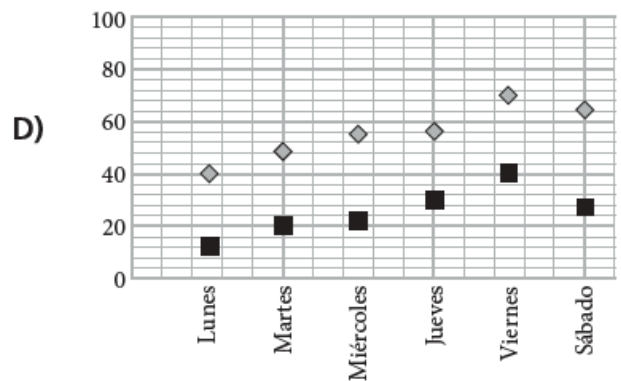
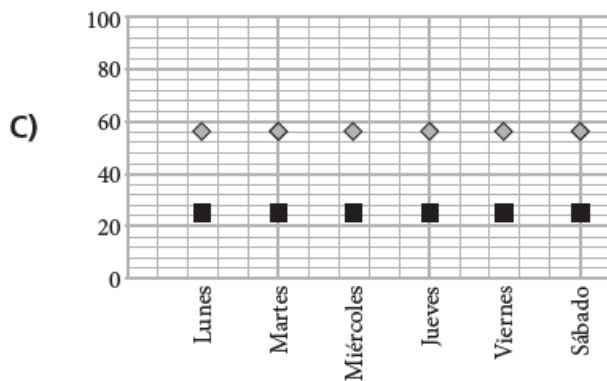
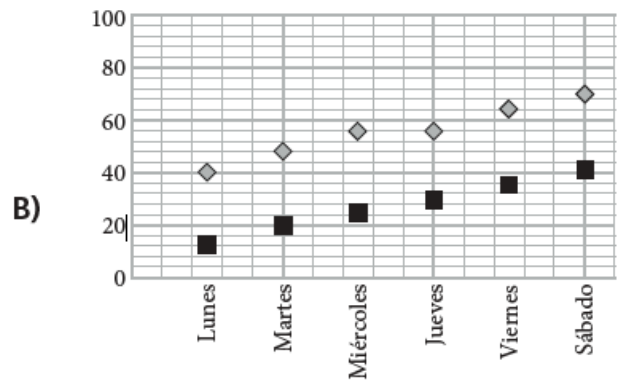
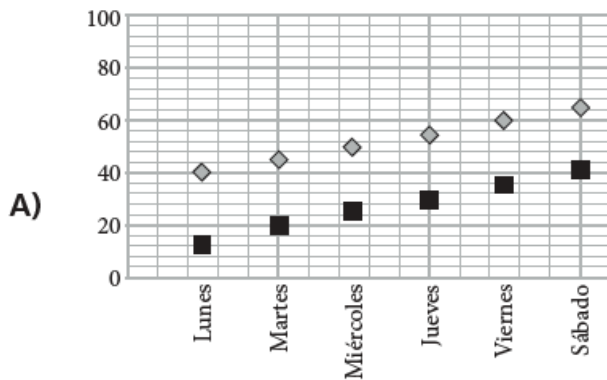
16

OA12

El administrador de una página web recibe recursos cada vez que una persona que visita el sitio hace click en un anuncio publicitario. Observa el registro que tuvo:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Nº de visitas	40	50	55	57	70	65
Nº de click	12	20	22	30	40	26

Considerando que  es el número de visitas y  es el número de click, ¿cuál opción muestra la misma información que la tabla?







17

OA12

¿Cuál es la finalidad de una tabla de contingencia?

- a) Contar la cantidad de individuos de una investigación.
- b) Contar la cantidad de individuos totales de una investigación.
- c) Contar la cantidad de individuos u objetos con un tipo de variable cualitativa.
- d) Contar la cantidad de individuos u objetos con dos tipos de variables cualitativas

18

OA12

Observa la información de la tabla en la que se muestran las preferencias de dos deportes de 40 estudiantes de un colegio. Luego, establece dos conclusiones.

Preferencias de dos deportes de 40 estudiantes			
Deportes	Fútbol	Balonmano	Básquetbol
Natación	2	5	3
Tenis	6	7	8
Atletismo	1	2	6

- a) La mayoría de los estudiantes prefieren el atletismo y el fútbol.
- b) La minoría de los estudiantes prefieren el básquetbol como deporte grupal. Siete estudiantes prefieren tenis y atletismo.
- c) La mayoría de los estudiantes prefieren el tenis como deporte individual. Sólo un estudiante prefiere el atletismo y el fútbol.
- d) La mayoría de los estudiantes prefieren el básquetbol deporte individual. Sólo tres estudiante prefiere la natación y el fútbol.



19

OA12

En un consultorio, cada una de las personas que asistió respondió una sola opción ante las siguientes preguntas:

- ¿Eres hombre o mujer?
- ¿Vives en zona rural o urbana?

El siguiente es el resumen de las respuestas:

- 30 hombres
- 20 mujeres
- 15 hombres viven en zona rural
- 12 mujeres viven en zona urbana

De las siguientes opciones, ¿cuál muestra la información correcta acerca de las personas que fueron al consultorio?

A)

		Zona donde vive	
		Urbana	Rural
Mujeres	10	10	
Hombres	15	15	

B)

		Zona donde vive	
		Urbana	Rural
Mujeres	20	20	
Hombres	30	30	

C)

		Zona donde vive	
		Urbana	Rural
Mujeres	12	8	
Hombres	20	10	

D)

		Zona donde vive	
		Urbana	Rural
Mujeres	12	8	
Hombres	15	15	



Tipo de individuo	Frecuencia
Hombre en zona rural	12
Hombre en zona urbana	54
Mujer en zona rural	16
Mujer en zona urbana	48

¿Cuál de las siguientes tablas de convergencia se asocia a la tabla de frecuencia anterior?

a)

	Rural	Urbana
Hombre	12	54
Mujer	16	48

b)

	Rural	Urbana
Hombre	16	48
Mujer	12	54

c)

	Rural	Urbana
Hombre	48	54
Mujer	12	16

d)

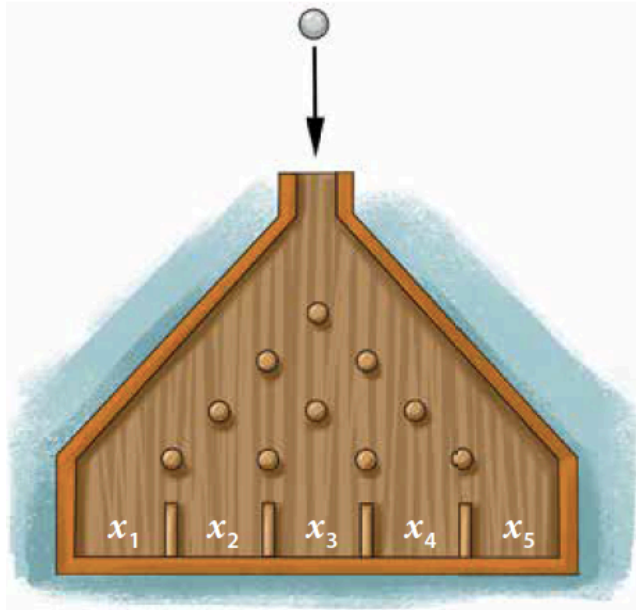
	Rural	Urbana
Hombre	54	48
Mujer	16	12



## B) SINTESIS DE CONTENIDO: COMPORTAMIENTO ALEATORIO ( OA15)

### Tabla de Galton y paseos aleatorios

La tabla de Galton o máquina de Galton consta de un tablero vertical con varias filas de clavos. Se introducen bolitas en la parte superior para que caigan rebotando aleatoriamente y depositándose, a medida que caen, en los casilleros de la parte inferior. La imagen muestra una máquina de Galton con cuatro filas de clavos y cinco casilleros,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  y  $x_5$ .



• ¿Crees que en todos los casilleros caerán aproximadamente la misma cantidad de bolitas? Justifica.

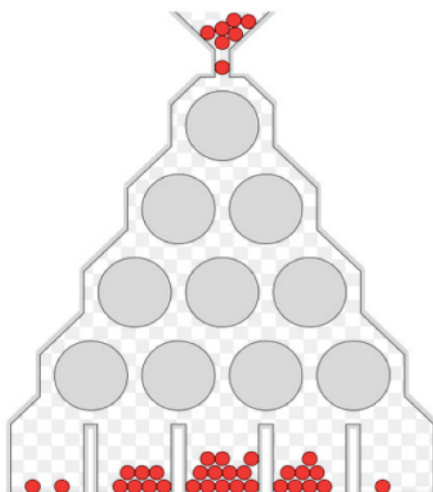
• Si en la pregunta anterior respondiste que no, ¿en qué casilleros caerán más bolitas? ¿En qué casilleros caerán menos bolitas?

• Si en la primera pregunta respondiste que sí, ¿por qué lo crees?

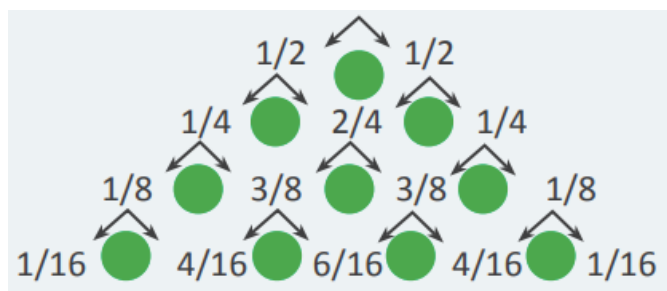
### Veamos el siguiente ejemplo para familiarizarnos con la tabla de Galton

En una tabla de Galton, las bolitas entran de a una y caen por un sistema de obstáculos, que pueden ser botones, clavos, etc. Al pasar un obstáculo, la bolita seguirá su camino con la probabilidad de  $\frac{1}{2}$  por la izquierda o por la derecha.

Después de haber pasado todos los niveles de obstáculos, caerán en las casillas donde finalmente quedarán.



Entonces, ¿todos los caminos tienen la misma probabilidad? Si observamos la maquina anterior, podemos ver que tiene 5 casillas donde llegarán las bolitas, por lo que las probabilidades que van tomando los caminos para llegar a dichas casillas son:





Las probabilidades anteriores se obtienen de la siguiente manera: Debemos ir determinando el 50% de la probabilidad anterior, es decir si teníamos en un principio  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{2}$  las probabilidades siguientes se obtendrán  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , y los caminos centrales corresponden a las sumas de las probabilidades obtenidas en los caminos.

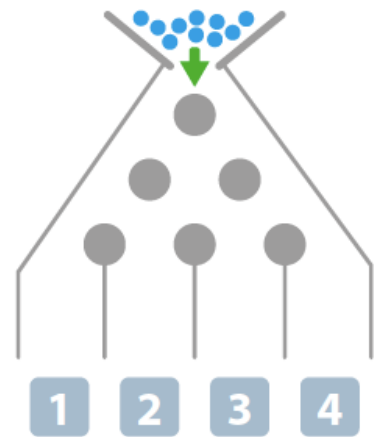
**Ejemplo 1:** En una máquina de Galton, como la que se muestra en la imagen, ¿cuál es la probabilidad de que una bolita caiga en el casillero 3?

Se definen los eventos:

- D: Elección a la derecha.
- I : Elección a la izquierda.

Representa en un diagrama los caminos posibles y su probabilidad en cada caso. Observa que hay 3 caminos posibles: I - D - D, D - I - D y D - D - I.

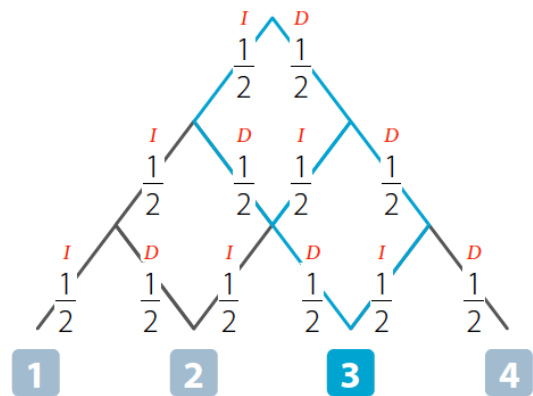
Utiliza las reglas de la adición y la multiplicación para calcular la probabilidad de que la bolita caiga en el casillero 3.



Luego, obtienes lo siguiente:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Entonces, la probabilidad de que una bolita caiga en el casillero es de  $\frac{3}{8}$ .

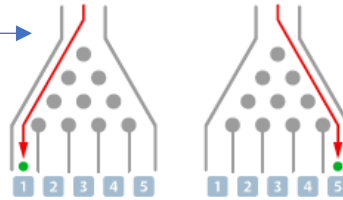


- La **tabla** o **máquina de Galton** permite reconocer el comportamiento de una distribución normal de los resultados que corresponden a un experimento, en el cual cada etapa carece de certeza con respecto a qué camino se seguirá.
- Un **paseo aleatorio** es una caminata o un recorrido en el cual en cada paso o etapa se tienen varias opciones para continuar, pero no se tiene certeza de cuál se tomará.

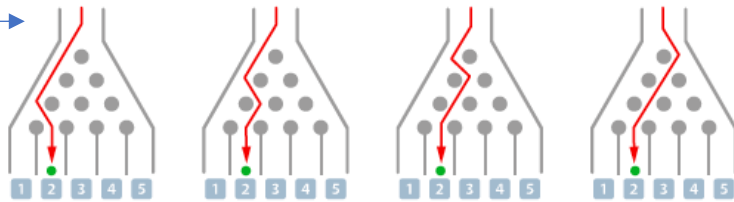


**Ejemplo 2:** Una bolita es lanzada por una máquina de Galton con cinco casilleros de salida. ¿Cuántos caminos diferentes puede recorrer la bolita?

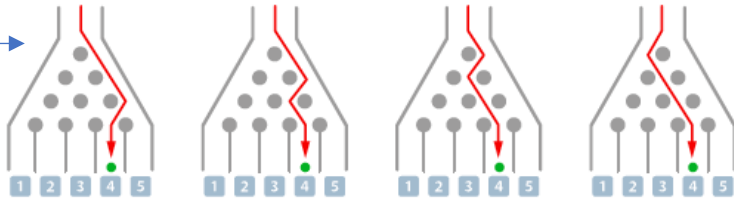
- Un camino para la salida 1 y otro para la salida 5



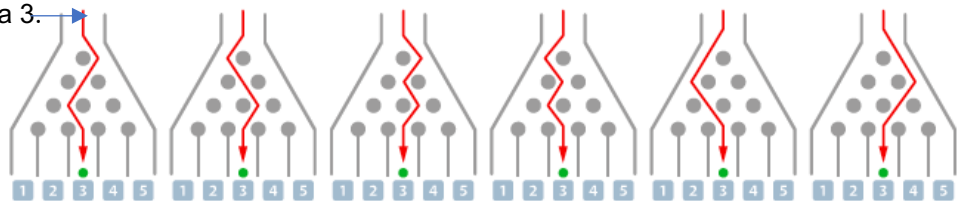
- Cuatro caminos para la salida 2.



- Cuatro caminos para la salida 4.



- Seis caminos para la salida 3.



Entonces, la bolita puede recorrer 16 caminos diferentes.

**Ejemplo 3:** Considera los datos del Ejemplo 2 y calcula las siguientes probabilidades.

- a) La probabilidad de cada camino.

**Respuesta:** Como en total hay 16 caminos diferentes y todos tienen la misma probabilidad de ocurrir, la probabilidad de cada camino es  $\frac{1}{16}$ .

- b) La probabilidad de que la bolita llegue a la salida 2.

**Respuesta:** Hay cuatro caminos diferentes que llegan a la salida 2, por lo que la probabilidad de que la bolita llegue a la salida 2 es  $\frac{4}{16}$ .



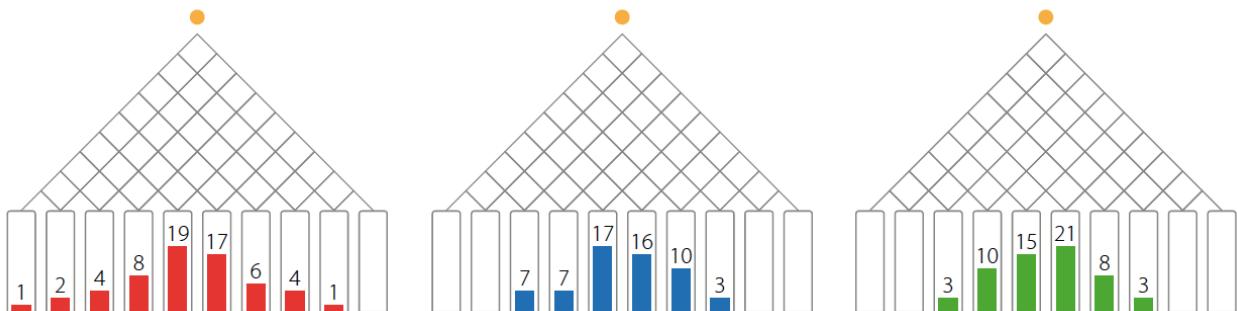
c) La probabilidad de que la bolita llegue a una salida con un número par o mayor que 3.

**Respuesta:** Hay ocho casos favorables para el evento: «llegar a una salida par», y cinco para el evento «llegar a una salida mayor que 3», entonces las probabilidades son  $\frac{8}{16}$  y  $\frac{5}{16}$ , respectivamente.

Luego, como los eventos no son disjuntos, la probabilidad de que la bolita llegue a una salida con un número par o mayor que 3 es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{16} + \frac{5}{16} - \frac{4}{16} = \frac{9}{16}$$

**Ejemplo 4:** Tres estudiantes construyen una máquina de Galton para ver la distribución de los resultados al lanzar 60 bolitas desde su parte superior. Realizan en tres oportunidades el experimento y representan con barras la distribución obtenida en cada caso.



En función de las distribuciones obtenidas se puede afirmar que:

1º Las bolitas, en al menos estos casos, se concentraron en los casilleros centrales, disminuyendo en número hacia los lados.

2º La probabilidad de que una de las bolitas caiga en uno de los extremos es muy baja.

3º Si se traza una línea curva que represente la distribución de los resultados, estas tendrían una forma acampanada.



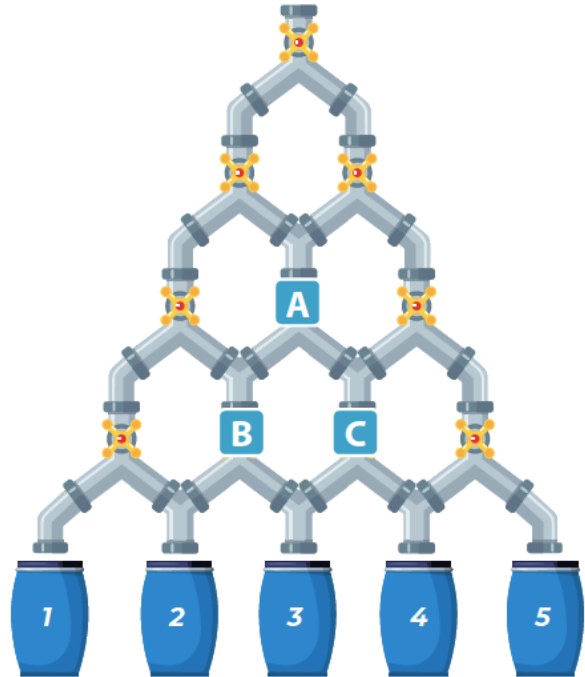
**Ejemplo 4:** Al dejar pasar 100 L de agua por las tuberías que se muestran en la imagen, ¿qué recipiente tiene mayor posibilidad de llenarse primero? ¿Cuántos litros de agua se estima recibiría dicho recipiente?

Como la cantidad de agua se divide en dos en cada bifurcación, entonces, en el primer nivel se divide en 50 L por cada cañería.

En el segundo nivel, la división es de 25 L por cada bifurcación, juntándose 50 L en el punto A.

Siguiendo con el mismo razonamiento, en los puntos B y C se juntan  $(12,5 + 25) = 37,5$  L, que en cada caso se dividen en dos, aportando a la salida del recipiente 3  $(18,75 + 18,75) = 37,5$  L.

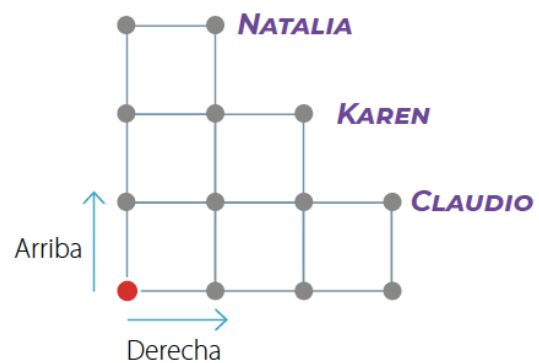
Análogamente, se puede calcular que para los recipientes 2 y 4 debieran llegar 25 L a cada uno. Por último, los recipientes 1 y 5 recibirían 6,25 L.



Por lo tanto, el recipiente 3 tiene más posibilidades de llenarse primero, con 37,5 L, aproximadamente.

### Probabilidad en paseos aleatorios

**Ejemplo 5:** Natalia, Karen y Claudio juegan a mover una ficha en un tablero desde el , y cada uno selecciona un punto ganador, como se muestra en la imagen. Los movimientos de la ficha están definidos por el lanzamiento de una moneda. Si el resultado es cara, la ficha avanza hacia la derecha y si es sello avanza hacia arriba.



a) ¿Cuáles son los resultados en el lanzamiento de la moneda que permiten que Claudio sea el vencedor?

**Respuesta:** Los resultados consecutivos al lanzar la moneda y que permiten que Claudio gane son cuatro: C - C - C - S; C - C - S - C, C - S - C - C y S - C - C - C. Entonces, cualquier resultado que contenga tres caras y un sello le permite ganar.





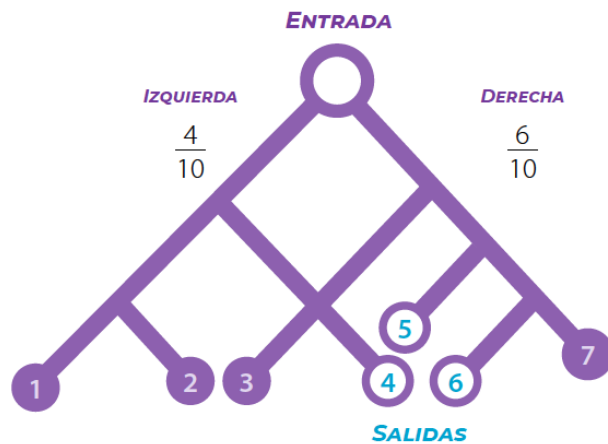
b) ¿Cuáles son los resultados en el lanzamiento de la moneda que permiten que Karen sea la ganadora?

**Respuesta:** Los resultados consecutivos al lanzar la moneda y que permiten que Karen gane son seis: C - C - S - S; S - S - C - C; C - S - S - C; C - S - C - S; S - C - S - C y S - C - C - S. Entonces, cualquier resultado que contenga dos caras y dos sellos le permite ganar.

Un **paseo aleatorio** se puede modelar usando probabilidades y un diagrama de árbol, asignando probabilidad de ocurrencia a cada una de las etapas y aplicando las propiedades de las probabilidades estudiadas anteriormente (regla aditiva y multiplicativa).

**Ejemplo 6:** El diagrama representa un laberinto en el cual, según la experiencia en cada bifurcación, el 40% de las personas optan por ir a la izquierda y un 60% a la derecha. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que ingresa al laberinto logre encontrar la salida?

Observa que hay nueve recorridos posibles para llegar a uno de los siete caminos del laberinto, donde los caminos 4, 5 y 6 son los que tienen salida.



Por otro lado, al considerar los eventos **D: ir a la derecha** e **I: ir a la izquierda**, los casos favorables para encontrar la salida son cuatro en total:

- C1: I - D - D
- C2: D - I - D
- C3: D - D - I
- C4: D - D - D - I

Las siguientes son las probabilidades de que una persona tome cada uno de los caminos indicados:

- $I - D - D \triangleright P(C_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{144}{1000} = \frac{18}{125}$
- $D - I - D \triangleright P(C_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{144}{1000} = \frac{18}{125}$
- $D - D - I \triangleright P(C_3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{144}{1000} = \frac{18}{125}$
- $D - D - D - I \triangleright P(C_4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{864}{10000} = \frac{54}{625}$



Entonces, la probabilidad de que una persona que ingresa al laberinto logre encontrar la salida es:

$$\begin{aligned}
 P(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4) &= P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) \\
 &= \frac{18}{125} + \frac{18}{125} + \frac{18}{125} + \frac{54}{625} \\
 &= \frac{324}{625} \\
 &= 0,5184 \\
 &= 51,8\%
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que la persona logre llegar a la salida es aproximadamente de un 52 %.

Cuando realizas varias veces un mismo experimento aleatorio, la **frecuencia relativa de un evento** se define como la cantidad de resultados a favor del evento elegido, dividido por la cantidad total de veces que se realizó el experimento.

La frecuencia relativa de un evento también es conocida como la **probabilidad empírica**. Esta permite aproximar la probabilidad teórica de cierto evento en situaciones en que no se conoce con exactitud.

**Ejemplo 7:** En la siguiente tabla se muestra la cantidad de automóviles de cada color que pasaron por una calle durante una hora.

¿Cuál es la probabilidad empírica de que pase por la calle un automóvil de color rojo en una hora?

Para obtener la probabilidad pedida, calcula la frecuencia relativa del evento de interés. En este caso, el evento es que pase un automóvil rojo, cuya frecuencia relativa es  $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ .

Luego, la probabilidad empírica de que pase un automóvil rojo en una hora es de  $\frac{1}{5}$ , que es igual a 0,2.

Colores de automóvil	
Color	Frecuencia absoluta
Azul	6
Blanco	4
Negro	6
Rojo	6
Verde	8
Total	30

---

Recuerda que la **frecuencia absoluta** es la cantidad de veces que se observa un cierto evento, y la **frecuencia relativa** de un evento corresponde a la frecuencia absoluta dividida por el total observado.

---



**Ejemplo 8:** Nicolás va del colegio a su casa y en su trayecto pasa a ver a su abuela. Desde el colegio a la casa de ella tiene tres caminos diferentes y desde allí a su casa tiene dos. El diagrama presenta las probabilidades de los caminos que puede elegir. ¿Cuál es la probabilidad de que Nicolás tome el camino A1 o el C2?

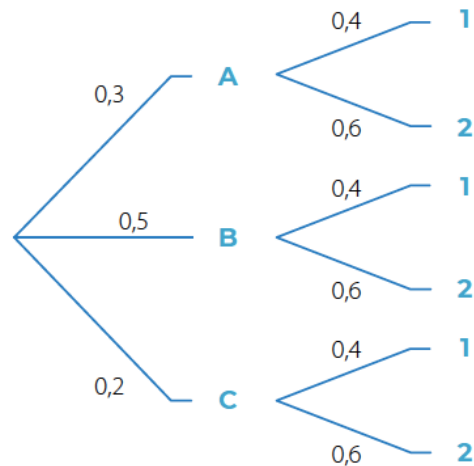
Observa los datos del diagrama y calcula.

• Como  $P(A) = 0,3$  y  $P(1) = 0,4$ .  
Entonces,  $P(A1) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$

• Como  $P(C) = 0,2$  y  $P(2) = 0,6$ .  
Entonces,  $P(C2) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$

Por lo tanto, la probabilidad de que Nicolás tome el camino A1 o el camino C2 es:

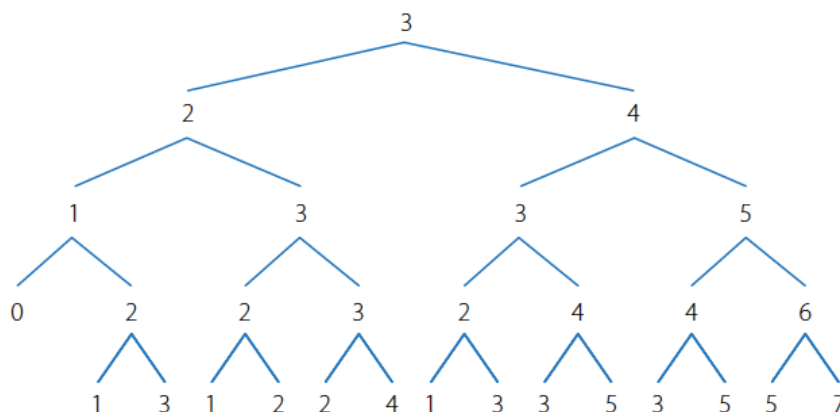
$$P(A1 \cup C2) = 0,12 + 0,12 = 0,24$$



**Ejemplo 9:** Mateo está jugando un juego de deportes de 4 etapas, en el cual debe ir eligiendo al competidor que ganará la prueba en cada etapa. Él siempre apuesta que su jugador preferido ganará y sabe que la probabilidad de que lo haga es de 0,5 y la probabilidad de que pierda es de 0,5. Mateo comienza el juego con 3 puntos y piensa apostar 1 punto en cada etapa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane al menos 1 punto?

1º Construye un diagrama de árbol para representar el experimento.



Identifica los resultados favorables del evento **G**: que gane al menos 1 punto. En este caso, corresponden a las ramas con números finales 4, 5 y 7.



Como la probabilidad en cada una de las líneas es de  $\frac{1}{2}$ , por el principio multiplicativo se tiene que la probabilidad de que quede con 4, 5 o 7 puntos es  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$  en cada caso. Entonces, la probabilidad de que gane al menos 1 punto es:

$$P(G) = \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) = \frac{5}{16} = 0,3125 = 31,25\%$$

**b)** ¿Cuál es la probabilidad de que quede con 0 o 1 punto?

Para esta segunda pregunta, identifica los resultados favorables de los eventos:

- A: Mateo queda con 0 puntos.
- B: Mateo queda con 1 punto.

En este caso, corresponden a las ramas con números finales 0 y 1.

Como la probabilidad en cada una de las líneas es de  $\frac{1}{2}$ , por el principio multiplicativo se tiene que la probabilidad de que quede con 0 puntos es  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ , y la probabilidad de que quede con 1 punto es  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$  en cada caso.

Como la probabilidad de que quede con 0 o 1 puntos ( $A \cup B$ ) está compuesta por eventos disjuntos, se utiliza la propiedad aditiva de la probabilidad:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) = \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125 = 31,25\%$$

Entonces, la probabilidad de que quede con 0 o 1 punto es de un 31,25%

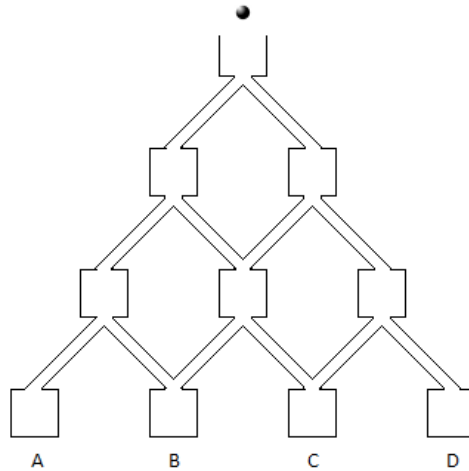


**Instrucciones:** A continuación usted encontrará preguntas de selección múltiple. Lea atentamente, resuelva y **ENCIERRE EN UN CÍRCULO** la letra de la alternativa correcta.

**Utiliza la siguiente información para responder las preguntas 1 y 2**

Un experimento consiste en dejar caer una bolita para que llegue a alguna de las cajas finales.

Observa como se ve antes de que la bolita se suelte:



1

OA15

De todos los caminos posibles, ¿cuántos llegan a la caja B?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

2

OA15

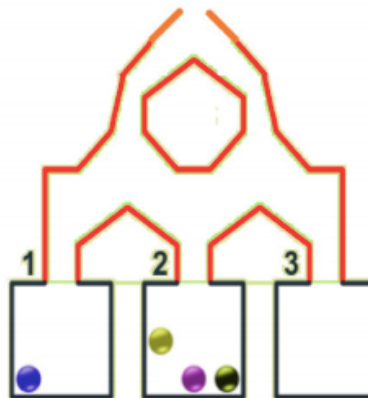
Si el experimento se repitiera con 800 bolitas sin sacarlas de las cajas, ¿qué opción muestra cantidades mas probables que tenga cada caja?

- A) 95   308   297   100   B)   400   400
- C) 20   380   380   20   D) 200   200   200   200



Utiliza la siguiente información para responder las preguntas 3, 4 y 5

Observa la siguiente tabla de Galton:



3

OA15

¿Cuál de las siguientes casillas tiene mayor probabilidad de que la bolita llegue?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) Todas tienen la misma probabilidad

4

OA15

¿Cuál de las siguientes casillas tiene menor probabilidad de que la bolita llegue?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 1 y 3

5

OA15

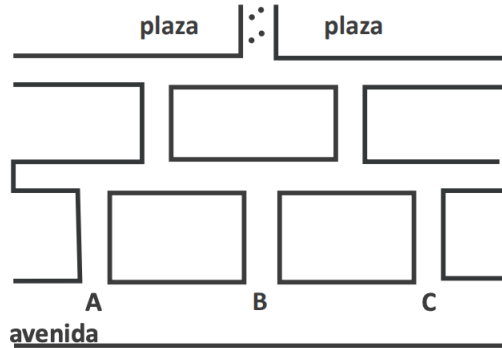
¿Cuál es la probabilidad de que la bolita llegue a la casilla 2?

- a)  $\frac{1}{2}$
- b)  $\frac{1}{4}$
- c)  $\frac{2}{3}$
- d)  $\frac{3}{4}$



Utiliza la siguiente información para responder las preguntas 6, 7, 8 y 9.

Un perrito camina de la plaza hacia la avenida.



6

OA15

Cuántos caminos posibles puede emprender el perrito.

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

7

OA15

¿Cuál es la probabilidad de que el perro llegue al cruce A?

- a)  $\frac{1}{2}$
- b)  $\frac{1}{4}$
- c)  $\frac{1}{6}$
- d)  $\frac{1}{8}$

8

OA15

¿Cuál es la probabilidad de que el perro llegue al cruce B?

- a)  $\frac{1}{2}$
- b)  $\frac{1}{4}$
- c)  $\frac{1}{6}$
- d)  $\frac{1}{8}$



9

OA15

¿Cuál es la probabilidad de que el perro llegue al cruce C?

- a)  $\frac{1}{2}$
- b)  $\frac{1}{4}$
- c)  $\frac{1}{6}$
- d)  $\frac{1}{8}$

10

OA15

¿Cuál de los siguientes eventos es considerado un evento aleatorio?

- a) La elección de un camino de retorno a un lugar de trayecto conocido.
- b) Un concurso de elegir entre cuatro puertas, sin tener información.
- c) La elección de la ropa a comprar por una persona.
- d) Parar en un signo Pare al ir conduciendo.

11

OA15

Marcela apostará en cierto juego en el que se sabe hay una probabilidad de ganar de 0,5 y una probabilidad de perder de 0,5. Ella cuenta inicialmente con \$ 3 y apuesta \$ 1 en cada juego. Marcela jugará a lo más 4 juegos. ¿Cuál es la probabilidad de que quede en la bancarrota (con \$ 0) o que gane al menos \$ 1?

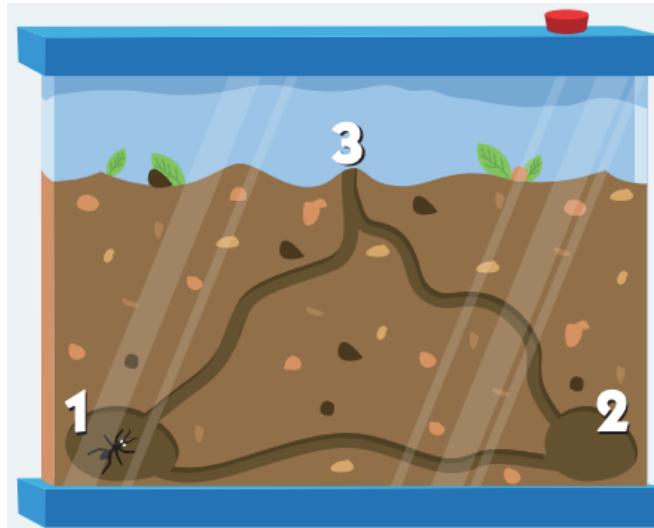
- a)  $\frac{2}{16}$
- b)  $\frac{3}{16}$
- c)  $\frac{5}{16}$
- d)  $\frac{7}{16}$





Utiliza la siguiente información para responder las preguntas 12 y 13.

Una hormiga se encuentra en uno de los vértices de un triángulo y se mueve a uno de los otros dos vértices en forma aleatoria. Además, se sabe que la hormiga tiene igual preferencia por ir a cualquiera de los dos vértices.



12

OA15

¿Cuál es la probabilidad de que la hormiga prefiriera ir al vértice 2?

- a)  $\frac{1}{3}$
- b)  $\frac{1}{4}$
- c)  $\frac{1}{2}$
- d)  $\frac{2}{3}$

13

OA15

¿Cuál es la probabilidad de que la hormiga prefiriera ir al vértice 3?

- a)  $\frac{1}{4}$
- b)  $\frac{1}{3}$
- c)  $\frac{2}{3}$
- d)  $\frac{1}{2}$



14

OA15

Se tiene una tabla de Galton con 6 niveles. ¿Cuál es la probabilidad de que una bolita llegue a una de las casillas laterales?

- a)  $0,5^3$
- b)  $0,5^4$
- c)  $0,5^5$
- d)  $0,5^6$

15

OA15

De la tabla anterior, ¿cuál de las 7 casillas tiene una mayor probabilidad de que una bolita llegue?

- a) Primera
- b) Segunda
- c) Central
- d) Última

16

OA15

¿Cuál es la probabilidad de una bolita llegue a una casilla lateral en una tabla de Galton con 4 niveles?

- a)  $0,5^3$
- b)  $0,5^4$
- c)  $0,5^5$
- d)  $0,5^6$



Utiliza la siguiente información para responder las preguntas 17, 18 y 19.

OA15

Observa la siguiente tabla de doble entrada:

	Padres fumadores	Padres no fumadores
Hijo con asma	280	32
Hijo sin asma	45	143

17

OA15

¿Cuál es la probabilidad de que un hijo tenga asma con padres fumadores?

- a)  $\frac{45}{500}$
- b)  $\frac{143}{500}$
- c)  $\frac{280}{500}$
- d)  $\frac{312}{500}$

18

OA15

De la tabla de la pregunta anterior, ¿cuál es la probabilidad de que un hijo no tenga asma con padres no fumadores?

- a)  $\frac{45}{500}$
- b)  $\frac{143}{500}$
- c)  $\frac{280}{500}$
- d)  $\frac{312}{500}$

19

OA15

¿Cuál es la probabilidad que un hijo tenga asma con padres fumadores o no fumadores?

- a)  $\frac{45}{500}$
- b)  $\frac{143}{500}$
- c)  $\frac{280}{500}$
- d)  $\frac{312}{500}$



20

OA15

La siguiente tabla fue tomada de una encuesta de salud realizada a 200 jóvenes universitarios.

	No practica deportes	Practica deportes	Total
Mujeres	28	72	100
Hombres	33	67	100
Total	61	139	200

Si se selecciona uno de estos jóvenes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer que practica deportes?

- a)  $\frac{1}{72}$
- b)  $\frac{28}{72}$
- c)  $\frac{72}{200}$
- d)  $\frac{72}{139}$

21

OA15

Para un estudio se realizó una encuesta a 54 mujeres sobre la cantidad de hijos que tenía. Lamentablemente, después de registrar los resultados se produjo un problema en la computadora que almacenaba los datos y se perdieron algunos, quedando solo la siguiente tabla:

Resultados de una encuesta		
Cantidad de hijos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	9	
1		$\frac{1}{9}$
2	18	
3		
4		$\frac{1}{6}$

Si se escoge una mujer al azar de este grupo, ¿cuál es la probabilidad empírica de que ella tenga 2 o 4 hijos?

- a)  $\frac{1}{6}$
- b)  $\frac{2}{9}$
- c)  $\frac{1}{2}$
- d)  $\frac{1}{6}$



Utiliza la siguiente información para responder las preguntas 22, 23, 24 y 25.

OA15

La siguiente tabla de doble entrada muestra las preferencias en deportes (individual y en equipo) de 40 estudiantes de un colegio.

Preferencias de dos deportes de 40 estudiantes			
Deportes	Fútbol	Balonmano	Básquetbol
Natación	2	5	3
Tenis	6	7	8
Atletismo	1	2	6

22

OA15

Determine la probabilidad de que al estudiante le guste el fútbol y el tenis.

- a)  $\frac{2}{40}$
- b)  $\frac{6}{40}$
- c)  $\frac{17}{2}$
- d)  $\frac{21}{40}$

23

OA15

La probabilidad de que al estudiante le guste el balonmano y correr.

- a)  $\frac{2}{40}$
- b)  $\frac{6}{40}$
- c)  $\frac{17}{2}$
- d)  $\frac{21}{40}$



24

OA15

La probabilidad de que al estudiante le guste el tenis.

- a)  $\frac{2}{40}$
- b)  $\frac{6}{40}$
- c)  $\frac{17}{40}$
- d)  $\frac{21}{40}$

25

OA15

La probabilidad de que al estudiante le guste el básquetbol y el tenis o correr.

- a)  $\frac{2}{40}$
- b)  $\frac{6}{40}$
- c)  $\frac{14}{40}$
- d)  $\frac{21}{40}$