

Guía N°4 Matemática, III°Medio.

Nombre de alumno/a: Curso:.....

Unidad: Álgebra y funciones. Probabilidad y estadística.	Contenido: Ecuación cuadrática, área y volumen de una esfera, probabilidades.
--	---

OA4: Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas.

OA7: Desarrollar la fórmula del área de la superficie y el volumen de la esfera

OA12: Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad

Ecuación cuadrática

- Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde x es la variable, a , b y c constantes; a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal y c es el término independiente. Es importante destacar que $a \neq 0$.
- Una ecuación cuadrática puede tener a lo más dos soluciones en los números reales.

Tipos de funciones cuadráticas:

<u>Completas:</u>	<u>Incompletas:</u>	<u>No son funciones cuadráticas:</u>
$x^2 + 5x - 6 = 0$	$x^2 + 3x = 0$	$x^3 + 8x + 3 = 0$
$2x^2 - 9 + 10 = 0$	$7x^2 + 4 = 0$	$2x^3 - 9 = 0$

Métodos para resolver una ecuación cuadrática

1. Método de la Raíz cuadrada

Analizamos las características de una ecuación como la siguiente:

$x^2 - 25 = 0$ \longrightarrow Debemos despejar x , para ello haremos lo siguiente.

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -5$$

Es importante comprender el porqué de los resultados x_1 y x_2 , pues recordemos que todo número real positivo tiene dos raíces reales, una positiva y otra negativa. Ejemplo: $\sqrt{25} = \pm 5$ ya que, $(-5) \cdot (-5) = 25$ y también $(5) \cdot (5) = 25$

Otro ejemplo:

$2x^2 - 25 = 15$  Debemos despejar x , para ello haremos lo siguiente.

$$2x^2 = 15 + 25$$

$$2x^2 = 40$$

$$x^2 = \frac{40}{2}$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20}$$

$$x_1 = \sqrt{20}$$

$$x_2 = -\sqrt{20}$$

Actividad

Ecuación	Resolución	Solución, x_1 y x_2
$x^2 - 100 = 0$		
$x^2 - 13 = 3$		
$x^2 - 9 = 27$		
$3x^2 - 15 = 0$		
$5x^2 + 20 = 30$		

Método por factorización

- En este método analizaremos 2 casos

1) Primer Caso:

Ecuación de la forma: $x^2 + 5x = 0$
 $x(x + 5) = 0$

Identificamos cuál es el factor común, el cuál es x
Aplicamos el teorema del factor 0

$x1 = 0$	$(x + 5) = 0$
	$x2 = -5$

Otro ejemplo: $3x^2 - 6x = 0$
 $3x(x - 6) = 0$

Identificamos cuál es el factor común, el cuál es $3x$
Aplicamos el teorema del factor 0

$3x = 0$	$(x - 6) = 0$
$x = \frac{0}{3}$	$x2 = 6$
$x1 = 0$	

2) Segundo Caso:

Ecuación de la forma: $x^2 + 6x + 8 = 0$ 
 $(x + 4)(x + 2) = 0$

Vamos a factorizar buscando dos números cuya suma sea 6 y multiplicados de 8.

$(x + 4) = 0$	$(x + 2) = 0$
$x1 = -4$	$x2 = -2$

Otro ejemplo: $x^2 - 8x + 15 = 0$
 $(x - 5)(x - 3) = 0$

Vamos a factorizar buscando dos números cuya suma sea -8 y multiplicados de 15.

$(x + 5) = 0$	$(x - 3) = 0$
$x1 = -5$	$x2 = 3$

Actividad

Resolver los siguientes ejercicios utilizando el método por factorización.

Ecuación	Resolución	Solución, x_1 y x_2
$x^2 + 17x = 0$		
$x^2 - 2x = 0$		
$4x^2 - 8x = 0$		
$2x^2 + 20x = 0$		
$x^2 + 4x = -15x$		

Ecuación	Resolución	Solución, x_1 y x_2
$x^2 + 5x + 4 = 0$		
$x^2 + 9x + 18 = 0$		
$x^2 - 7x + 12 = 0$		
$x^2 - 16x + 63 = 0$		

Fórmula General

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



La fórmula cuadrática o de segundo grado es un método muy completo y sirve para encontrar los valores de x de cualquier tipo de ecuación cuadrática, ya sea completa o incompleta.

Por ejemplo: Sea la ecuación cuadrática $x^2 + 5x - 14 = 0$ determinar los valores de x que satisfagan la igualdad.

Primero $a = 1$ $b = 5$ $c = -14$

Reemplazando en la fórmula general:

$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot -14}}{2 \cdot 1}$	$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot -14}}{2 \cdot 1}$
$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 + 56}}{2}$	$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{25 + 56}}{2}$
$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2}$	$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2}$
$x_1 = \frac{-5 + 9}{2}$	$x_1 = \frac{-5 - 9}{2}$
$x_1 = \frac{4}{2}$	$x_1 = \frac{-14}{2}$
$x_1 = 2$	$x_1 = -7$

Otro ejemplo: ¿Cuáles son los números pares consecutivos cuyo producto es 728?

x Número par

$(x + 2)$ Número par consecutivo.

$$\left. \begin{array}{l} x \\ (x + 2) \end{array} \right\} x \cdot (x + 2) = 728$$

Resolviendo:

$$x^2 + 2x = 728$$

$$x^2 + 2x - 728 = 0$$

Reemplazando en la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1; b = 2; c = -728$$

$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -728}}{2 \cdot 1}$	$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -728}}{2 \cdot 1}$
$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 + 2912}}{2}$	$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{4 + 2912}}{2}$
$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2916}}{2}$	$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{2916}}{2}$
$x_1 = \frac{-2 + 54}{2}$	$x_1 = \frac{-2 - 54}{2}$
$x_1 = \frac{52}{2}$	$x_1 = \frac{-56}{2}$
$x_1 = 26$	$x_1 = -28$

Actividad

- 1) Calcular los valores de x_1 y x_2 de las siguientes ecuaciones cuadráticas (utilizando fórmula general)

a) $x^2 + 7x + 6 = 0$

b) $x^2 + 4x = 0$

c) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

- 2) Un número es mayor en 10 unidades que un número x . Si el producto entre ellos es de 50, ¿cuáles son los números?
- 3) En un rectángulo el largo mide $(x + 7)$ y el ancho $(x + 2)$. Si el área del rectángulo es 36cm^2 , hallar el valor de x .
- 4) Calcular un número positivo sabiendo que su triple más el doble de su cuadrado es 119.
- 5) Un grupo de amigos organizó un viaje cuyo transporte costaba \$ 300 000 en total. En el último momento se inscribieron cinco amigos más, por lo que cada uno pagó \$ 2000 menos de la cuota fijada. ¿Cuántos amigos iban al viaje inicialmente?
- 6) Dos números consecutivos son tales que el cuadrado del mayor excede en 111 al triple del menor. ¿Cuáles números son?

Tenga en consideración lo siguiente: **Discriminante**

Con el discriminante se puede determinar la cantidad de soluciones reales de una ecuación cuadrática, sin necesidad de calcularlas rigurosamente.

Esto es posible calculando el valor del discriminante de una ecuación cuadrática, que se simboliza con la letra griega delta (Δ). Este valor, que se obtiene de la expresión

$\Delta = b^2 - 4ac$, cumple las siguientes características:

1º Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones en los números reales.

2º Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución en los números reales.

3º Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución en los números reales

Calcular el discriminante y determina cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones cuadráticas.

1. $x^2 + 3x - 1 = 0$

2. $10x^2 - 7x + 2 = 0$

3. $2x^2 + 4x + 2 = 0$

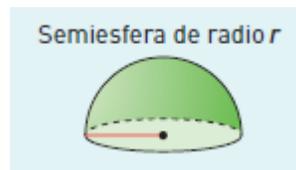
4. $x^2 - 5x - 6 = 0$

Área y volumen de una esfera

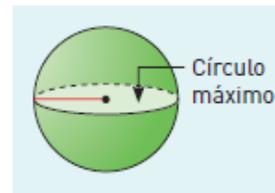
La **esfera** es un cuerpo geométrico limitado por una superficie curva, llamada casquete esférico, cuyos puntos equidistan de un punto central llamado centro de la esfera. Esta distancia corresponde al radio de la esfera.



Una **semiesfera** es cada uno de los cuerpos que se obtiene al dividir una esfera en dos partes iguales.

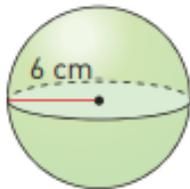


El **círculo máximo** de una esfera corresponde a la base de cada semiesfera que se puede obtener de ella. Es decir, el círculo máximo y la esfera tienen el mismo radio.

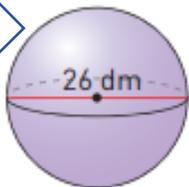


- El **área del círculo máximo** se calcula mediante la fórmula $A = \pi \cdot r^2$

Ejemplo: Calcular el área del círculo máximo de cada esfera.



$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot 6^2 \\ A &= 36\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

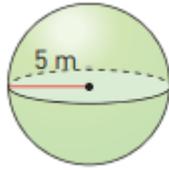


$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot 13^2 \\ A &= 169\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

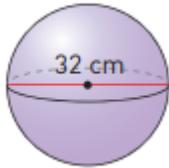
Recordar que el radio es la mitad del diámetro. En este caso, si el diámetro es 26 cm, el radio será 13cm.

- El área de la esfera está dada por la expresión $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Ejemplo: Calcular el área de cada esfera.



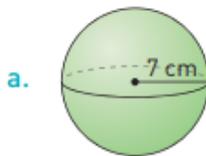
$$A = 4 \cdot \pi \cdot 5^2$$
$$A = 4 \cdot \pi \cdot 25$$
$$A = 100\pi \text{ cm}^2$$



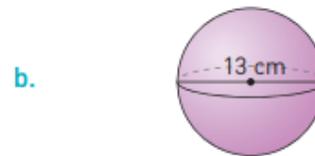
$$A = 4 \cdot \pi \cdot 16^2$$
$$A = 4 \cdot \pi \cdot 256$$
$$A = 1024\pi \text{ cm}^2$$

Actividad

1) Calcula el área de cada esfera, considera $\pi = 3$.

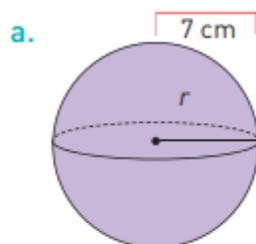


Resuelve aquí

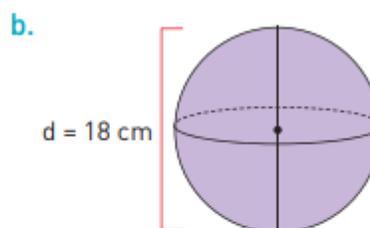


Resuelve aquí

2) Analiza cada figura. Luego, calcula el área de la superficie de cada esfera.

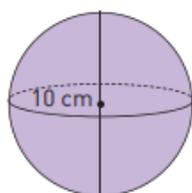


Resuelve aquí



Resuelve aquí

3. Analiza la figura. Luego, calcula:



- a. Área del círculo máximo.
- b. El área de la esfera.
- c. El área de los tres cuartos de la esfera.

Resuelve aquí

a.

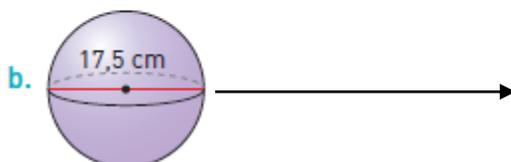
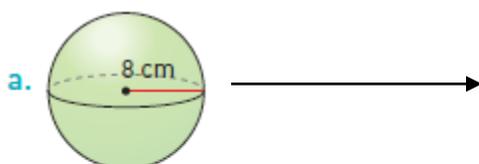
Resuelve aquí

b.

Resuelve aquí

c.

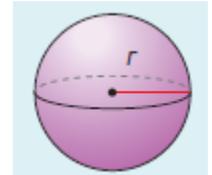
4) Calcular el **área del círculo máximo** de:



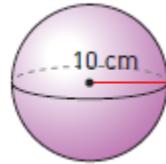
Volumen de una esfera

El volumen es el espacio que ocupa un cuerpo, en este caso la esfera.

El volumen de la esfera está dado por la expresión $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$



Ejemplo de resolución. Calcular el volumen de la siguiente esfera:

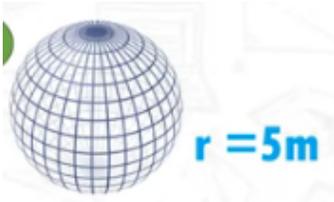


$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \\ V &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1000 \\ V &= \frac{4000}{3} \cdot \pi \end{aligned}$$

Actividad

- 1) Calcular el volumen de una esfera de 12 cm de radio, considera $\pi = 3$.
- 2) Calcular el volumen de una esfera de 30 cm de diámetro, considera $\pi = 3$.
- 3) Si el radio de una esfera aumenta al doble, ¿en cuánto aumenta su volumen?

4)



Calcular el volumen

5)



Calcular el volumen

- 6) En un parque de mi ciudad han construido el siguiente monumento con forma de esfera. Indica el volumen y el área de esta esfera de 70 dm de diámetro.



Probabilidades

- **La probabilidad se refiere a la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso.** Su noción viene de la necesidad de medir la certeza o duda de que un suceso dado ocurra o no. Esta establece una relación entre el número de sucesos favorables y el número total de sucesos posibles $\left(\frac{\text{Números de casos posibles}}{\text{Número total de casos posibles}}\right)$. Por ejemplo, lanzar un dado, y que salga el número 1 (caso favorable) está en relación a seis casos posibles (seis caras); es decir, la probabilidad es 1/6.

Situaciones donde se analiza la probabilidad

¿Cómo se aborda la probabilidad en los medios de comunicación?

La paradoja de los cuatro hijos

Asumiendo que la mitad de los nacimientos son de varones y la mitad de mujeres, el sentido común nos impulsa a creer que en un caso como este la familia tendrá dos hijos y dos hijas. Pero puede demostrarse matemáticamente que tal cosa es bastante improbable. Es la paradoja de los cuatro hijos. Nuestro cerebro tiende a jugarnos malas pasadas cuando asume resultados basándose en lo que la gente llama «sentido común». Cuando enfrentamos los resultados obtenidos por este método intuitivo con los que arrojan los fríos (pero efectivos) cálculos matemáticos, vemos con sorpresa cuán equivocados estábamos. Una de las paradojas que resulta más sencilla de demostrar es la que Martin Gardner, un divulgador científico y filósofo de la ciencia estadounidense, llama «paradoja de los cuatro hijos». Gardner dice que si sabemos (o nos cuentan) que un matrimonio tiene cuatro hijos, tendemos a pensar que existe una alta probabilidad de que dos de ellos serán niños y dos niñas. Sin embargo, y a pesar de que estadísticamente prácticamente la mitad exacta de los nacimientos son de varones y la mitad de mujeres, puede demostrarse matemáticamente que nuestra intuición falla miserablemente. Las matemáticas demuestran que solo el 37,5% de las familias con cuatro hijos tendrá dos de cada sexo, y que -en realidad- es mucho más probable tener 3 hijos de un sexo y uno del otro que cualquiera de las otras posibilidades por separado.

A continuación, tendremos una serie de planteamientos los cuales debemos ir analizando

Lee la información y luego responde las preguntas.

- I. Existe un 35 % de probabilidad de que se produzcan chubascos el día de hoy por la tarde y un 20 % durante la noche.
 - a. ¿Es mayor la probabilidad de que llueva a la de que no llueva?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya chubascos durante la tarde?

- II. Los accidentes en las fábricas generalmente tienen su origen en fallas humanas o en las condiciones inseguras del lugar de trabajo. En algunos casos, también incide el horario en que se realice el trabajo. En cierta fábrica se produjeron, el año pasado, 30 accidentes, cuyos porcentajes por combinación de factores se expresan en el siguiente cuadro.

Turno	Condiciones inseguras	Fallas humanas
Matutino	5 %	32 %
Vespertino	6 %	25 %
Nocturno	2 %	30 %

Se elige aleatoriamente un reporte de accidente de entre los 30 reportes. Calcula la probabilidad de que el accidente:

- a. Haya ocurrido en el turno de noche.
- b. Se deba a una falla humana.
- c. Se haya producido durante los turnos vespertino o nocturno.

III.

Un grupo de estudiantes del sur de Chile, interesados por la astronomía, está organizando un encuentro de observaciones astronómicas en la Región del Biobío. Ellos necesitan por lo menos de 3 días seguidos de cielo despejado. Para esto han investigado los datos de meteorología del lugar de los últimos 20 años entre los meses de octubre y marzo, y obtuvieron lo siguiente:

Mes	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar
Probabilidad día nublado (%)	29	27	15	16	13	23

¿Cuál será el mes más apropiado para realizar el encuentro?

IV. Un centro meteorológico utiliza los siguientes modelos para realizar los pronósticos del tiempo:

- Si la temperatura ambiental es inferior a los 8 °C, la probabilidad de chubascos es de un 10 %.
- Si la temperatura ambiental está entre los 8 °C y los 18 °C, la probabilidad de chubascos es de un 40 %.
- Si la temperatura ambiental está sobre los 18 °C, la probabilidad de chubascos se reduce a un 5 %.

1. Si un comerciante quiere vender paraguas, ¿cuál es la temperatura ambiental que le resulta más conveniente?

2. Si el pronóstico dice que el lunes la temperatura ambiental será de 20 °C; el martes, de 10 °C y el miércoles, de 5 °C, ¿en cuál de ellos será más apropiado vestir ropa para lluvia?

V. Historia, geografía y ciencias sociales.

La tabla muestra la probabilidad de que llueva 10 o más días durante un mes en una ciudad. Una empresa del lugar, que vende materiales para la construcción, tiene mayor cantidad de ventas en los meses en los que la probabilidad de chubascos durante 10 días o más es menor que 0,2. Además, en esos meses debe contratar una mayor cantidad de trabajadores. Por otro lado, cuando la probabilidad de chubascos supera el 0,6, se generan pérdidas.

Mes	Probabilidad de lluvia
Enero	2%
Febrero	5%
Marzo	12%
Abril	8%
Mayo	20%
Junio	70%
Julio	90%
Agosto	30%
Septiembre	20%
Octubre	18%
Noviembre	10%
Diciembre	5%

- a. Según la información, ¿en qué meses es probable que la empresa deba contratar más trabajadores?

- b. Si los dueños de la empresa deciden cerrar durante los meses que probablemente llueva 10 o más días, ¿cuántos meses estará cerrada?

VI. El proceso para detectar una posible enfermedad en una persona mediante un examen de sangre es complejo, ya que involucra diferentes etapas. Cuando se trata de una enfermedad grave, si el resultado sale positivo implica la toma de una contramuestra – es decir, un nuevo examen– que confirme el primero. En este contexto, se llama “falso positivo” a un resultado positivo en el examen obtenido por un paciente que realmente no presenta la enfermedad, mientras que se denomina “falso negativo” al caso opuesto, es decir, cuando alguien presenta la enfermedad, pero esta no es detectada en el examen. Para un examen específico, la probabilidad de un falso positivo es 0,005, mientras que la de un falso negativo es 0,0002. En caso de que un paciente tenga un resultado positivo en el primer examen, se realiza un segundo que confirma o desmiente el resultado, mientras que, si es negativo en el primer examen, simplemente se informa.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que a un paciente se le informe que tiene la enfermedad?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que sigue el procedimiento sea un falso negativo?