



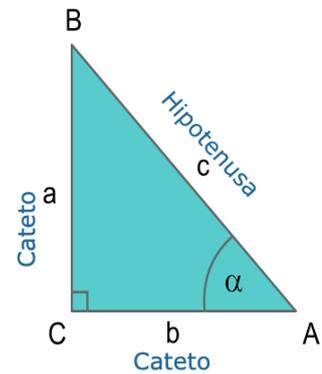
MATEMÁTICA II MEDIO
Guía Nº6:Septiembre

Nombre: _____ Curso: IIº ____ Fecha: ____ / 9 / 2021

A) SINTESIS DE CONTENIDO: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS (OA 8)

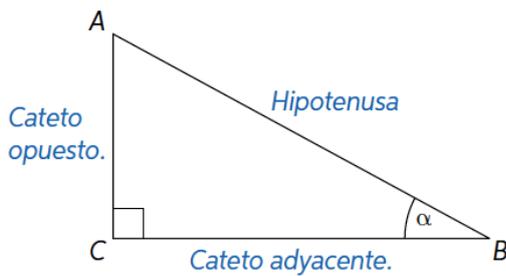
La Trigonometría es una rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos.

En un triángulo rectángulo, con un ángulo interior agudo, se puede establecer razones entre las medidas de sus lados.



Por criterio de semejanza ángulo - ángulo, las razones entre los lados de un triángulo rectángulo no dependen del tamaño del triángulo, sino de sus ángulos.

Considera que estas razones son siempre las mismas y que cada ángulo tiene un cateto adyacente y un cateto opuesto a él. Entonces, para α por ejemplo, se las puede definir de la siguiente manera:



Se lee	Se escribe	Se calcula	Ejemplo
Seno de α	$\text{sen}(\alpha)$	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{AC}{AB}$
Coseno de α	$\text{cos}(\alpha)$	$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{CB}{AB}$
Tangente de α	$\text{tg}(\alpha)$ o $\text{tan}(\alpha)$	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	$\frac{AC}{CB}$

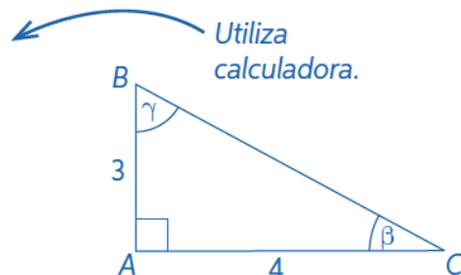
Ejemplo: Consideramos el triángulo ABC y calculamos su hipotenusa:

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow BC = 5$$

Luego, se calculan las razones trigonométricas.

$$\text{sen}(\beta) = \frac{3}{5} = 0,6; \text{cos}(\beta) = \frac{4}{5} = 0,8; \text{tg}(\beta) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{4}{5} = 0,8; \text{cos}(\gamma) = \frac{3}{5} = 0,6; \text{tg}(\gamma) = \frac{4}{3} = 1,3\bar{3}$$

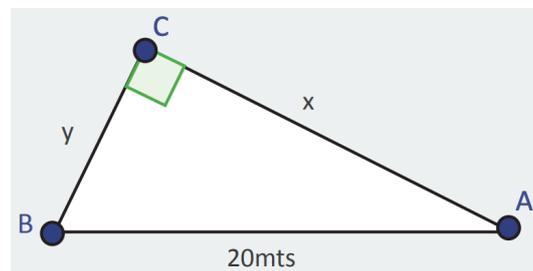




Utilizando el triángulo isósceles y el triángulo rectángulo puedes obtener los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30° , 45° y 60° . Así, gracias al teorema de Pitágoras y algunos simples cálculos, obtienes estos valores y no necesitas memorizarlos.

Ángulo	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{cos}(\alpha)$	$\text{tan}(\alpha)$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Con los valores de la tabla anterior podemos calcular las medidas de los lados faltantes de un triángulo, solo teniendo la medida de uno de sus lados y sus ángulos agudos, veamos un ejemplo:



Para determinar el valor de la medida y usando el ángulo de 30° en el vértice A y el valor de la hipotenusa, debemos usar la relación del seno:

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{20 \text{ mts}}$$

$$\Rightarrow 20 \text{ mts} = 2y$$

$$\Rightarrow 10 \text{ mts} = y$$

Para determinar el valor de la medida x usando el ángulo de 60° en el vértice B y el valor de la hipotenusa, debemos usar la relación del seno:

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20 \text{ mts}}$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{3} = 2x$$

$$\Rightarrow 17,3 \text{ mts} = x$$



Al utilizar las identidades trigonométricas en situaciones de la vida cotidiana, podemos determinar, medidas de distancia horizontal, vertical e inclusive en diagonal; además de los ángulos que se forman con estos tipos de medidas. En estos problemas veremos dos ángulos dependiendo de la perspectiva en que se ubique. Tenemos ángulos de elevación y de depresión. El primero se forma cuando la hipotenusa se encuentra debajo de los catetos y el segundo cuando la hipotenusa se encuentra sobre los catetos. Observa la imagen:

Utilizaremos el término ángulo de elevación o depresión para hacer referencia al ángulo que forma la línea de visión del objeto y la horizontal.

Las razones trigonométricas, junto con el teorema de Pitágoras, nos permiten resolver problemas que involucran triángulos rectángulos.

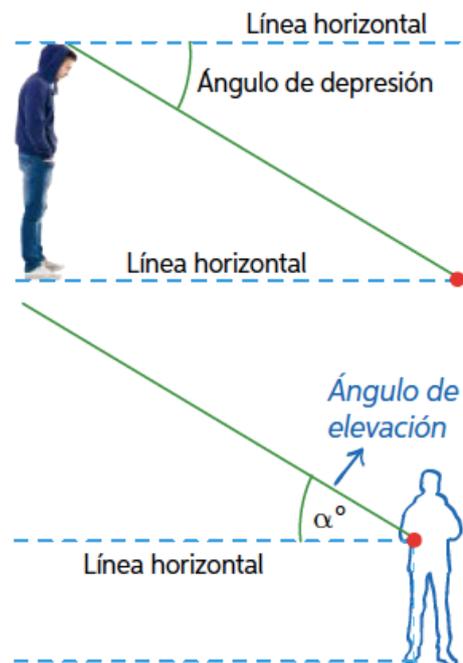
Para resolver puedes guiarte por los siguientes pasos:

Paso 1: Identifica los datos que se entregan en el problema y lo que debes encontrar.

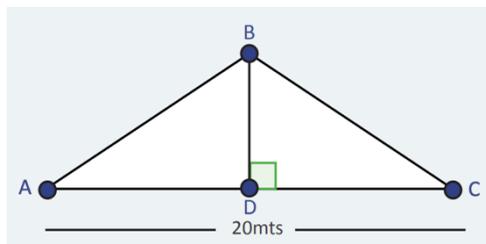
Paso 2: Representa la situación a través de un dibujo.

Paso 3: Aplica el teorema de Pitágoras y/o las razones trigonométricas.

Paso 4: Responde la pregunta del problema y verifica tu respuesta.



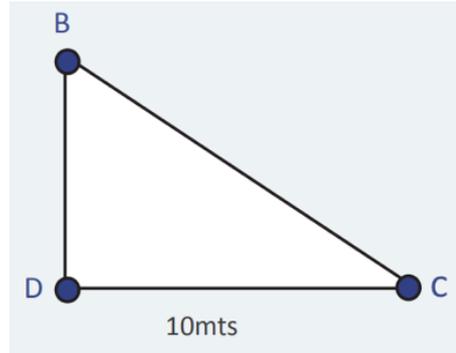
Ejercicio resuelto: Para la construcción del techo de una casa, sabe que se quiere tener un ángulo de elevación de 30° , además el ancho total de la casa es de 20 metros. ¿Cuál es la altura que debe tener el techo de la casa?



De acuerdo a las ilustraciones anteriores tenemos un ángulo de elevación, además lo que se busca es la altura de la casa que corresponde a un cateto y la medida del cateto faltante es de 10 mts, pues donde se encuentra la altura corresponde a la mitad del ancho total de la casa. Teniendo en cuenta estos datos la razón trigonométrica que necesitamos corresponde a la tangente de 30° .



El bosquejo final que nos ayudará a comprender mejor los datos pedidos es el siguiente:



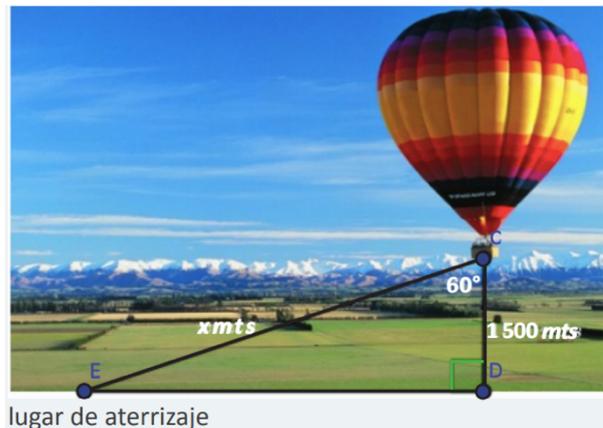
Para determinar la altura del techo entonces usaremos la definición de tangente, así entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \tan(30^\circ) &= \frac{\text{Altura}}{\text{Ancho}} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{x \text{ mts}}{10 \text{ mts}} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 10 &= x \\ \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{3} &= x \\ \Rightarrow 5,7 \text{ mts} &= x \end{aligned}$$

Respuesta: Con un ángulo de elevación de 30° y un ancho del techo de 10 metros, la altura del techo debe ser de 5,7 metros.

Ejercicio resuelto: Un globo aerostático se encuentra a una altura de 1500 metros sobre el nivel del mar cuando empieza su descenso ¿a qué distancia se encuentra del punto de aterrizaje si para el descenso aplica un ángulo de 60° ?

De acuerdo a los datos ilustrados en la imagen, debemos utilizar la razón del coseno de 60° , pues tenemos la medida del cateto adyacente y nos piden hallar la medida de la hipotenusa.



$$\begin{aligned} \cos(60^\circ) &= \frac{\text{Altura}}{\text{distancia de aterrizaje}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= \frac{1500 \text{ mts}}{x \text{ mts}} \\ \Rightarrow x &= 2 \cdot 1500 \\ \Rightarrow x &= 3000 \text{ mts} \end{aligned}$$

Respuesta: Con un ángulo de 60° y una altura de 1500 metros sobre el nivel del mar, la distancia del globo aerostático al punto de aterrizaje es de 3000 metros de longitud.



1. **Ejercicio resuelto:** Una piedra que está en el suelo se encuentra a 20 metros de un árbol con un ángulo de elevación de 60° a la copa del árbol. ¿Cuál es la altura del árbol?

Solución: Los datos corresponden a los catetos del triángulo rectángulo y la función trigonométrica que los relaciona es la tangente, entonces

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\Rightarrow \tan(60^\circ) = \frac{h}{20}$$

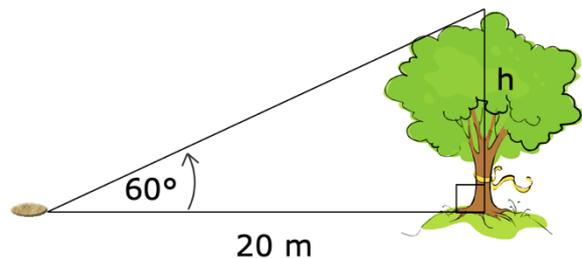
$$\Rightarrow \tan(60^\circ) = \frac{h}{20}$$

pero la $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$

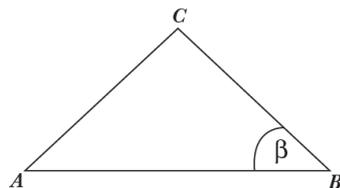
$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{20}$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{3} = h$$

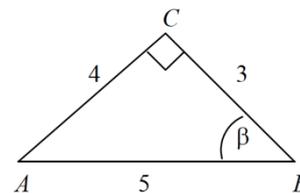
Por lo tanto, la altura (h) del árbol es $20\sqrt{3}$



2. **Ejercicio resuelto:** En la figura, el triángulo **ABC** es rectángulo en **C**, **BC** = 3 y **AB** = 5, entonces el *seno* de β es:



Solución: Por tríos pitagóricos, **AC** = 4, entonces:



$$\Rightarrow \text{sen}(\beta) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} \quad \text{(Reemplazando)}$$

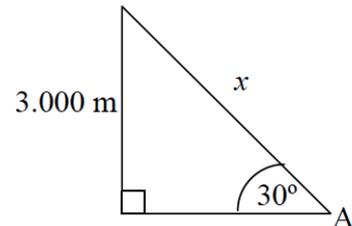
$$\Rightarrow \text{sen}(\beta) = \frac{4}{5}$$

Por lo tanto, el *sen* (β) es $\frac{4}{5}$



3. Ejercicio resuelto: Un helicóptero despegue del helipuerto con un ángulo de elevación de 30° . Si el helicóptero alcanza una altura de 3.000 metros, entonces ¿a qué distancia se encuentra el helicóptero del punto de despegue?

Solución: Al llevar la información a un dibujo, éste queda:



Si el helicóptero despegue desde el punto A, entonces la distancia (x) entre el punto de despegue y el helicóptero se puede calcular con la función $\text{sen}(\alpha)$.

$$\Rightarrow \text{sen}(\alpha) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} \quad \text{(Reemplazando)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3000}{x}$$

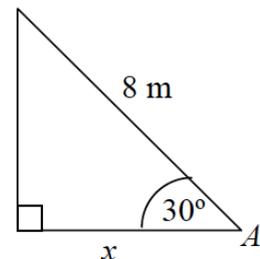
$$\Rightarrow x = 6000$$

Por lo tanto, la distancia es 6.000 metros.

4. Ejercicio resuelto: La distancia entre un papel que se encuentra en el suelo y la punta de un poste perpendicular a él es de 8 metros. Si el ángulo de elevación es de 30° , ¿a qué distancia se encuentra el papel del poste?

Solución: Al llevar la información a un dibujo, éste queda:

Si el papel se encuentra en el punto A, la distancia (x) se puede calcular con la función $\text{cos}(\alpha)$.



$$\Rightarrow \text{cos}(\alpha) = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \quad \text{(Reemplazando)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

Por lo tanto, la distancia entre el papel y el poste es $4\sqrt{3}$ metros.



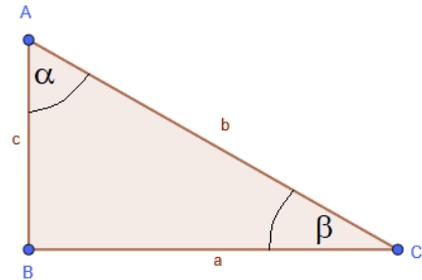
Instrucciones: Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1

OA8

El triángulo ABC es rectángulo en B. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- A) $\text{sen}(\alpha) = \frac{c}{a}$
- B) $\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{a}$
- C) $\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{b}$
- D) $\text{sen}(\alpha) = \frac{c}{b}$

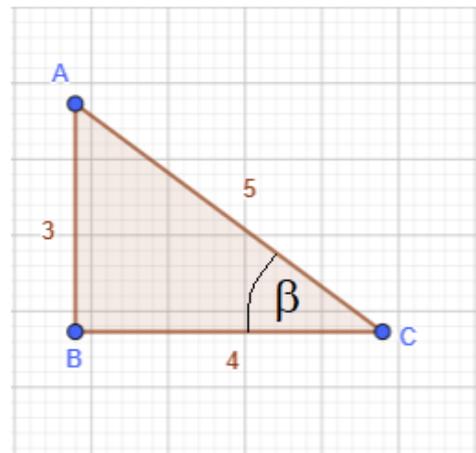


2

OA8

¿Cuál es la medida de la tangente del ángulo en C en el siguiente triángulo rectángulo?

- A) $\tan(\beta) = \frac{4}{5}$
- B) $\tan(\beta) = \frac{4}{3}$
- C) $\tan(\beta) = \frac{5}{4}$
- D) $\tan(\beta) = \frac{3}{4}$

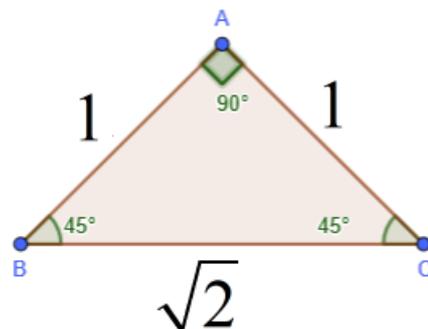


3

OA8

¿Cuál es el valor de la expresión $\cos(45^\circ)$ en el siguiente triángulo?

- A) $\sqrt{2}$
- B) $\sqrt{1}$
- C) $\sqrt{\frac{1}{2}}$
- D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$





Utiliza la tabla de valores de razones trigonométricas para la pregunta 4 a la 22

Ángulo α	$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tan } \alpha$
30°	0,5	0,86	0,57
40°	0,64	0,76	0,83
58°	0,84	0,52	1,6
61°	0,87	0,48	1,8

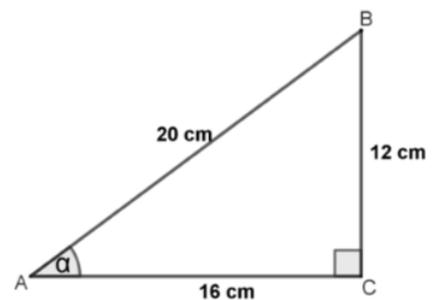
4

OA8

El triángulo ABC de la figura es rectángulo en C:

¿Cuál es el valor de $\frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$?

- A) $\frac{4}{5}$
- B) $\frac{3}{4}$
- C) $\frac{5}{4}$
- D) $\frac{4}{3}$



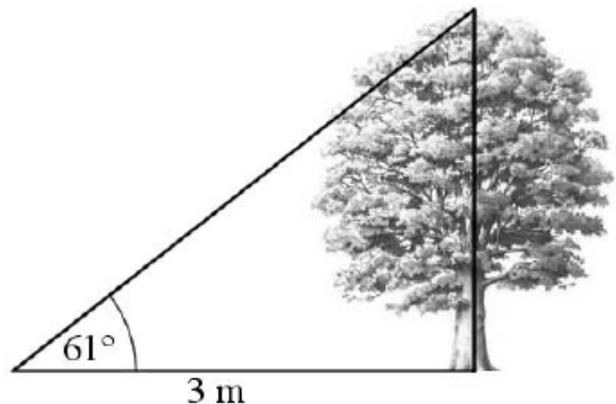
5

OA8

Observa la figura:

¿Cuál es la altura del árbol?

- A) 6 m
- B) 1,6 m
- C) 5,4 m
- D) 1,8 m





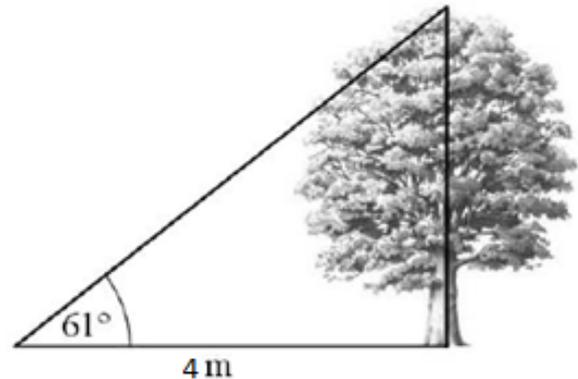
6

OA8

Observa la figura:

¿Cuál es la altura del árbol?

- A) 2,5 m
- B) 3,6 m
- C) 5,8 m
- D) 7,2 m



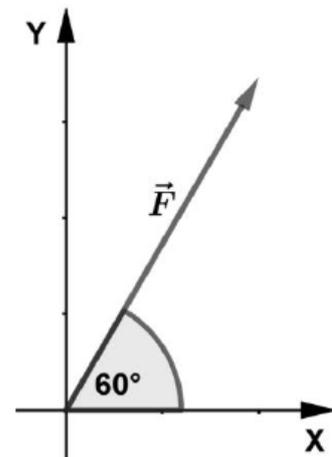
7

OA8

La magnitud del vector \vec{F} de la figura es 8 N.

¿Cuál de las siguientes opciones presenta las componentes del vector \vec{F} ?

- A) $F_x = 8 \cos 60^\circ$ $F_y = 8 \sin 60^\circ$
- B) $F_x = 8 \sin 60^\circ$ $F_y = 8 \cos 60^\circ$
- C) $F_x = 60 \cos 8^\circ$ $F_y = 60 \sin 8^\circ$
- D) $F_x = \cos 60^\circ$ $F_y = \sin 60^\circ$



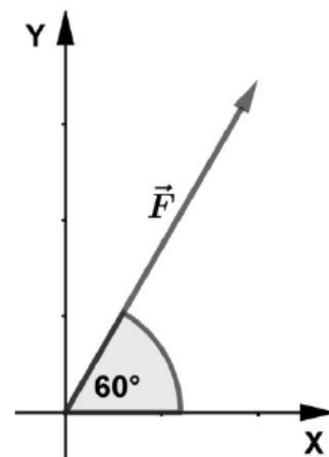
8

OA8

La magnitud del vector \vec{F} de la figura es 10 N.

¿Cuál de las siguientes opciones presenta las componentes del vector \vec{F} ?

- A) $F_x = 10 \cos 60^\circ$ $F_y = 10 \sin 60^\circ$
- B) $F_x = 10 \sin 60^\circ$ $F_y = 10 \cos 60^\circ$
- C) $F_x = \cos 60^\circ$ $F_y = \sin 60^\circ$
- D) $F_x = 10 \cos 8^\circ$ $F_y = 10 \sin 8^\circ$



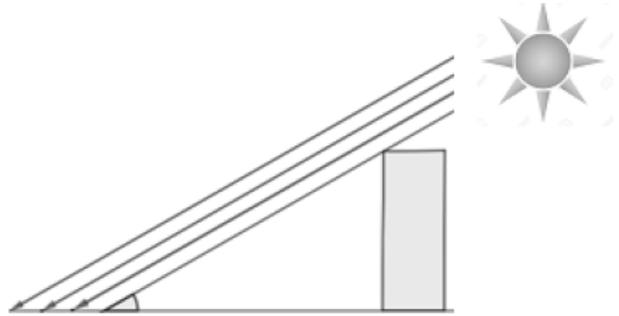


9

OA8

Un edificio tiene una altura de 64 metros. Los rayos del sol forman un ángulo de elevación de 30° . ¿Cuál es el cálculo que se debe hacer para determinar la sombra que proyecta el edificio?

- A) $64 \cdot 0,57 \text{ m}$
- B) $\frac{64}{0,57} \text{ m}$
- C) $64 \cdot 0,5 \text{ m}$
- D) $\frac{64}{0,86} \text{ m}$

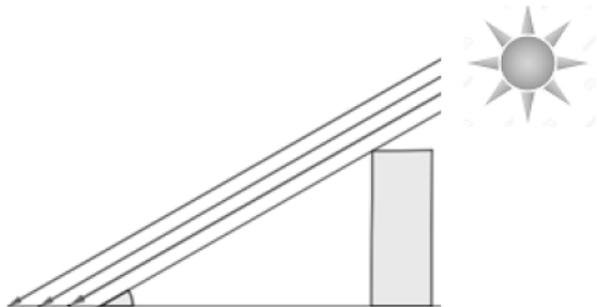


10

OA8

Un edificio tiene una altura de 70 metros. Los rayos del sol forman un ángulo de elevación de 40° . ¿Cuál es el cálculo que se debe hacer para determinar la sombra que proyecta el edificio?

- A) $\frac{70}{1,6} \text{ m}$
- B) $70 \cdot 0,83 \text{ m}$
- C) $\frac{70}{0,83} \text{ m}$
- D) $70 \cdot 1,6 \text{ m}$



11

OA8

El piloto de un helicóptero observa un punto M en la calle de una ciudad con un ángulo de depresión de 40° .



Si la visual del piloto al punto M es 10 km entonces, ¿cuál es la altura del helicóptero en ese momento?

- A) 7,6 Km
- B) 8,3 Km
- C) 8 Km
- D) 6,4 km



12

OA8

El piloto de un helicóptero observa un punto M en la calle de una ciudad con un ángulo de depresión de 30° .



Si la visual del piloto al punto M es 10 km entonces, ¿cuál es la altura del helicóptero en ese momento?

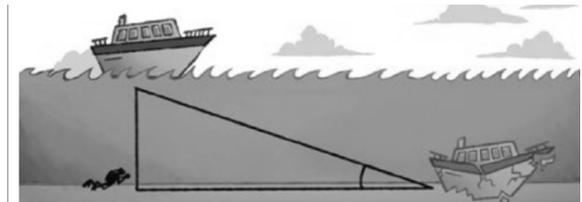
- A) 5,3 Km
- B) 5 Km
- C) 6,4 Km
- D) 5,6 Km

13

OA8

Un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio con un ángulo de depresión de 30° . Si un buzo desciende 80 metros hasta el fondo del mar, ¿aproximadamente cuánto necesita avanzar por el fondo para alcanzar los restos del naufragio?

- A) 160 m
- B) 93 m
- C) 140 m
- D) 100 m



14

OA8

Un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio con un ángulo de depresión de 58° . Si un buzo desciende 100 metros hasta el fondo del mar, ¿aproximadamente cuánto necesita avanzar por el fondo para alcanzar los restos del naufragio?

- A) 60,5 m
- B) 62,5 m
- C) 58,5 m
- D) 61,5 m





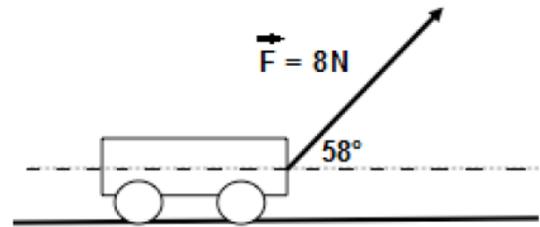
15

OA8

En la imagen, se representa un carro que es arrastrado aplicando una fuerza de 8N, con un ángulo de 58° :

¿Cuál es el valor de la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre el carro?

- A) 6,72 N
- B) 12,8 N
- C) 4,64 N
- D) 4,16 N



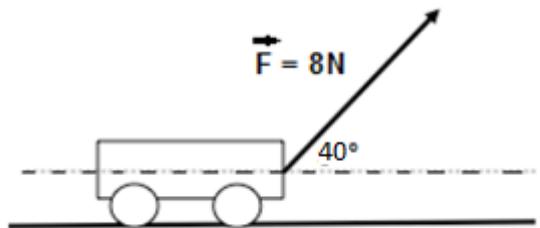
16

OA8

En la imagen, se representa un carro que es arrastrado aplicando una fuerza de 8N, con un ángulo de 40° :

¿Cuál es el valor de la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre el carro?

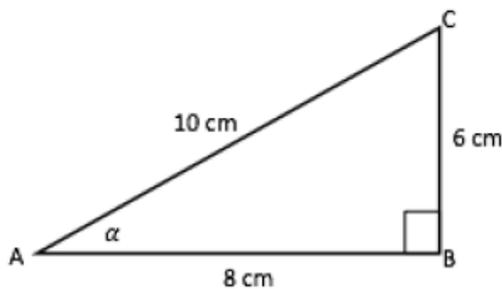
- A) 6,08 N
- B) 2,8 N
- C) 9,64 N
- D) 3,16 N



17

OA8

En la imagen, se representa un triángulo ABC rectángulo en B:



¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo α ?

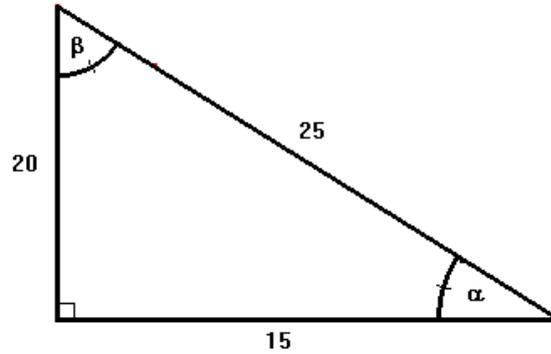
- A) 0,60
- B) 0,75
- C) 0,80
- D) 1,3



18

OA8

En la imagen, se representa un triángulo ABC rectángulo:



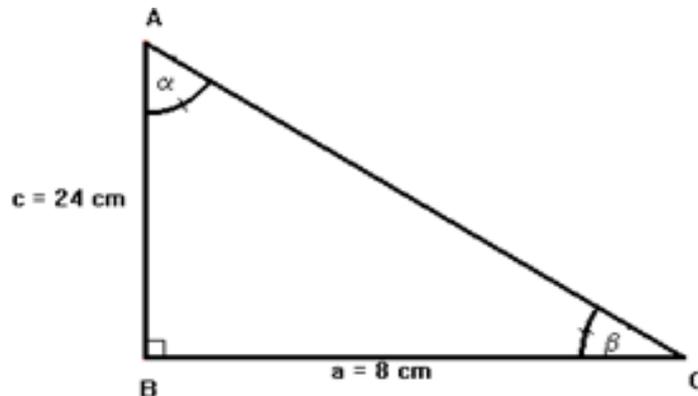
¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo α ?

- A) 0,60
- B) 0,75
- C) 0,80
- D) 1,33

19

OA8

En la imagen, se representa un triángulo ABC rectángulo en B:

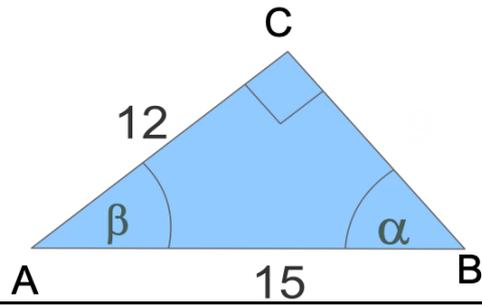


¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo α ?

- A) 3
- B) $\frac{1}{3}$
- C) 8
- D) 24



Dada la figura, triángulo rectángulo en C, responder del ejercicio 20, 21, 22 y 23.



20

El lado CB mide:

OA8

- A) 7
- B) 9
- C) 6
- D) 4

21

El $\text{sen } \alpha$ es:

OA8

- A) $\frac{4}{5}$
- B) $\frac{3}{5}$
- C) $\frac{5}{4}$
- D) $\frac{5}{3}$

22

La $\text{tan } \alpha$ es:

OA8

- A) $\frac{3}{5}$
- B) $\frac{5}{3}$
- C) $\frac{3}{4}$
- D) $\frac{4}{3}$



23

OA8

El valor de $\cos \alpha$ es:

- A) $\frac{2}{5}$
- B) $\frac{3}{5}$
- C) $\frac{4}{5}$
- D) $\frac{3}{4}$

24

OA8

Un avión se encuentra a una altura de 1200 metros sobre el nivel del mar, empieza su aterrizaje con un ángulo de descenso de 45° , ¿a que distancia se encuentra de la pista de aterrizaje? Aproxime a la centésima.

- A) 1200,35 mts
- B) 1500 mts
- C) 1697,06 mts
- D) 1542,36 mts

25

OA8

Un globo de helio está amarrado de un palo con una pita que mide 1800 metros de longitud, el ángulo que forma la pita donde está amarrado con respecto al suelo es de 30° , ¿a qué altura se encuentra el globo?

- A) 2400 mts
- B) 900 mts
- C) 600 mts
- D) 3600 mts



B) SINTESIS DE CONTENIDO: TÉCNICAS DE CONTEO (OA11)

Principios básicos de conteo: Las técnicas de conteo son mecanismos o métodos que nos sirven para encontrar la cantidad total de posibles ordenamientos de objetos en un experimento aleatorio. Estas técnicas nos permiten definir el espacio muestral de un experimento, es decir, determinar el conjunto de todos los posibles resultados.

- Contar la cantidad de elementos de conjuntos, relacionarlos todos entre sí o formar subgrupos respondiendo a determinadas características permite conocer de antemano el número de elementos muestrales en dicho experimento.

Las técnicas de conteo que estudiarás en esta lección permiten determinar el número de elementos de un espacio muestral en un experimento aleatorio, teniendo en cuenta el orden y la repetición de los elementos. Algunas son: el principio de multiplicación, la permutación y la combinación; las cuales se pueden complementar con diagramas de árbol.

Antes de continuar.... Es muy importante saber calcular los **números factoriales (n!)**:

Esta expresión en matemática lo llamamos “**números factoriales**”, la que se define como el producto de todos los números naturales de 1 hasta n , se llama n factorial y se escribe como $n!$

Si queremos calcular $3!$ (se lee 3 factorial) tenemos que realizar la siguiente operación

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

- El **principio multiplicativo** establece que, si un procedimiento se compone de dos etapas, que tienen respectivamente m y n posibilidades, entonces dicho procedimiento tiene $m \cdot n$ casos posibles en total. Si luego se agrega una nueva etapa, que tenga p posibilidades, el procedimiento tendrá $m \cdot n \cdot p$ casos posibles. Es decir, siempre se multiplica por la cantidad de posibilidades de cada etapa.

Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado y una moneda, se tiene que el espacio muestral del dado es 6 y la moneda 2. Luego la cantidad total de posibilidades son $6 \cdot 2 = 12$.



Ejercicio resuelto: En un local de comida rápida para la preparación de hamburguesas ofrecen tres tipos de carne: pollo, vacuno y cerdo; además cuatro tipos de acompañamientos: tomate, lechuga, palta y cebolla y cinco tipos de salsas: mayonesa, ketchup, mostaza, ajo y ají. ¿Cuántos tipos de hamburguesas ofrece el local?

De acuerdo con las diferentes etapas podemos establecer que:

La primera (tipo de carne): 3 posibilidades

La segunda (acompañamiento): 4 posibilidades

La tercera (Salsas): 5 posibilidades

Usando el principio multiplicativo: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ diferentes hamburguesas.

Si solo quedara carne de cerdo y dos salsas: mayonesa y ají, para la preparación de las hamburguesas ¿Cuánta variedad podrían ofrecer?

Usando el principio multiplicativo: $1 \cdot 4 \cdot 2 = 8$ diferentes hamburguesas.

1

OA11

“Corresponde a la cantidad numérica de posibles opciones en un experimento”. Esta definición corresponde a:

- A) Experimento aleatorio
- B) Espacio muestral
- C) Cardinalidad del espacio muestral
- D) Principio multiplicativo

2

OA11

Una tienda quiere mostrar su nueva colección de temporada en un maniquí, si hay tres poleras: con magas, sin mangas y con cierre, dos jean: negro y azul y cuatro tipos de calzado: Botines, zapatillas, zapato y sandalias ¿De cuántas formas distintas se podría mostrar la ropa?

- A) 6
- B) 9
- C) 12
- D) 24



3

OA11

Si en una carta de un restaurante ofrecen como menú 3 entradas, 2 platos de fondo y 3 postres, ¿cuántos menús distintos podemos elegir?

- A) 2
- B) 3
- C) 18
- D) 8

4

OA11

En una competencia de la fórmula 1, hay 6 participantes compitiendo. ¿Cuántos posibles resultados se pueden obtener al finalizar la carrera si se sabe que uno de ellos tuvo que abandonar por un desperfecto mecánico en su auto?

- A) 21
- B) 120
- C) 60
- D) 720

5

OA11

Para recordar una contraseña de cinco letras, Paula decide usar las letras de su nombre sin repetir ninguna de ellas. ¿Cuántas contraseñas distintas podría generar? Para visualizar con mayor claridad utilizaremos la siguiente representación:

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

Para la primera posición tenemos disponibles las 5 letras de su nombre, luego en el siguiente casillero solo nos quedan 4 letras, pues en el primer casillero ya se ocupó una, para la tercera posición nos quedan 3 letras, para la siguiente nos quedan solo dos letras y luego para la última posición nos queda solo una.

- A) 120
- B) 24
- C) 6
- D) 2



Permutaciones

- Una **permutación** de un conjunto de n elementos corresponde a la ordenación de estos. El número total de permutaciones entre n elementos distintos se denota como P_n y está dado por:

$$P_n = n!$$

Donde $n!$ se llama n factorial y corresponde al producto:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

← Además, se considera $0! = 1$

Para calcular el total de permutaciones de n elementos, de los cuales uno de ellos se repite p veces, otra q veces, otro r veces, y así sucesivamente, puedes aplicar la siguiente expresión:

$$P_{p,q,r}^n = \frac{n!}{p! \cdot r! \cdot q!}$$

Por ejemplo:

¿Cuántos números distintos de tres cifras diferentes se pueden escribir con los dígitos 1, 2 y 3?

Identificamos las características del problema:

- Se consideran todos los elementos
- No se repiten
- El orden importa.

Anotamos los números: 123 213 321

132 231 312

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

6

OA11

En la nueva villa de Antonia, las casas se deben enumerar con tres dígitos distintos, la presidenta del comité le señala que pueden hacer los ordenamientos con los tres primeros dígitos sin contar el cero. ¿Cuántas posibles direcciones distintas puede tener la casa de Antonia si los números no se pueden repetir?

Si utilizamos el mismo tipo de representación de los casilleros, tenemos:

3	2	1
---	---	---

Para el primer dígito tenemos tres opciones, el 1, 2 y el 3, luego para el segundo puesto ya nos quedan solo dos opciones y para el último puesto solo nos queda un número, así entonces la cantidad de direcciones distinta que puede tener la casa de Antonia es:

- A) 9
- B) 6
- C) 3
- D) 1



Analizamos el ejercicio anterior: el Debido a que por definición el principio multiplicativo lo aplicamos cuando tenemos etapas distintas de ordenamiento, en este caso solo se ordenan números lo que equivale a solo una etapa en sí. Podríamos haber utilizado el principio multiplicativo si la dirección de la casa incluía números y letras, en ese caso tenemos dos características o etapas distintas.

Es importante tener en consideración que para el uso de las permutaciones, debemos tener en cuenta que en el ordenamiento de los elementos deben realizarse con el total de ellos.

La operatoria de los números factoriales incide en como nosotros aplicamos las permutaciones, ya que este depende de dicho cálculo, desarrollemos algunos números factoriales para afianzar su desarrollo.

a) $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. En el primer cálculo de $4!$, podemos expresar su producto como:
 $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4$

b) $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Para el segundo cálculo de $6!$, también lo podemos expresar de otra forma sin afectar el resultado: $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 5! \cdot 6$

c) $1! = 1$

d) $0! = 1$

7

OA11

¿Cuántos ordenamientos distintos podemos hacer con todas las letras de la palabra "LAPIZ" si no debemos repetir ninguna de ellas?

- A) 4
- B) 5
- C) 24
- D) 120

8

OA11

Andrea quiere ordenar 6 libros de diferentes asignaturas en un estante, ¿Cuántos ordenamientos distintos posibles puede hacer con todos sus libros?

- A) $6!$
- B) 620
- C) $(6 - 1)!$
- D) $2 \cdot 3!$



9

OA11

Para recordar una clave de cinco letras, Diego decide usar solo las vocales sin repetir ninguna de ellas. ¿Cuántas claves distintas podría crear?

- A) 240
- B) 120
- C) 60
- D) 20

10

OA11

Cuántas palabras distintas podemos formar con las letras de la palabra “café”

- A) 48
- B) 36
- C) 24
- D) 12

Analicemos la siguiente situación: **Cuántas palabras distintas con o sin sentido podemos formar con las letras de la palabra “cama”.**

Si observamos bien, la palabra cama tiene una letra que se repite dos veces, la letra “a”, por lo que si una de las opciones es: “maca” y otra es “maca”, aunque las “a” estén en distinta posición una de otra el significado es el mismo, por lo que es necesario definir la permutación de “n” elementos con repetición de “a” de ellos.

Así entonces la permutación de “n” elementos en donde se repiten “a”, “b” y “c” elemento se calcula como:

$P_{a,b,c}^n = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$, en donde a , b y c corresponden a la cantidad de veces que se repite un elemento. Para dar respuesta a la pregunta anterior, debemos considerar que de un total de cuatro elementos, se repite uno de ellos dos veces, quedando el cálculo como:

$$P_2^4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 3 = 12$$

Si hacemos la comparación del total de formas distintas en que se pueden formar palabras con cuatro letras, podemos observar que en la segunda situación se reduce la cantidad debido a que la repetición de letras produce que se generen palabras con el mismo significado.



Es importante tener en cuenta, que cuando tenemos ordenamientos de todos los elementos de un conjunto, si estos tienen elementos repetidos, debido a que el ordenamiento de los elementos formará conjugados ya realizados.

11

OA11

¿Cuántos ordenamientos distintos podemos hacer con todas las letras de la palabra "FELICIDAD"?

- A) $9!$
- B) $9! \cdot 2!$
- C) $\frac{9!}{2! \cdot 2!}$
- D) $\frac{9!}{2!}$

12

OA11

Joaquín quiere ordenar 8 películas que tiene en DVD, pero 4 de ellas son de la saga de Harry Potter. ¿Cuántos ordenamientos distintos puede hacer?

- A) 1 500
- B) 1 680
- C) 40 032
- D) 24

Anteriormente vimos que, para aplicar una permutación, tenemos que considerar si los elementos que se van a ordenar tienen objetos que se repiten, pues si se cumple o no con la condición el cálculo variará. Ahora veremos si el ordenamiento lineal y circular cambia el número total de ordenamientos.

Analicemos la siguiente situación: En un bosque van caminando 3 amigos en fila, uno detrás del otro, con dirección a una fogata que encendieron para pasar el frío, si se sientan alrededor de la fogata en el mismo orden que van caminando ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar alrededor de la fogata?



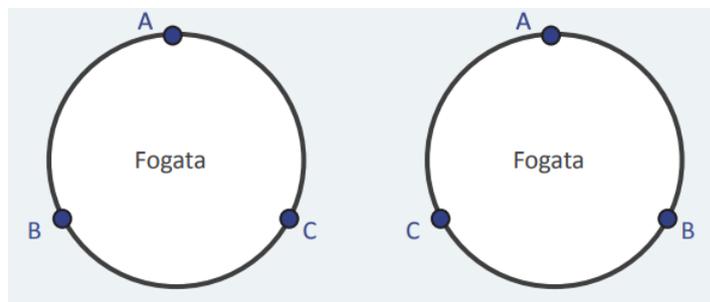


Veamos en primer lugar, de cuantas formas distintas se pueden sentar si lo hicieran de forma lineal, supongamos que las letras A, B y C son las iniciales de los nombres de los tres amigos, así entonces los ordenamientos posibles serían:

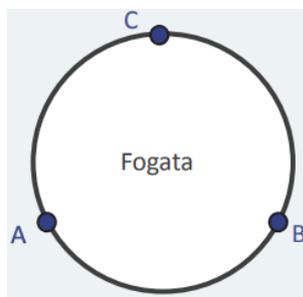
ABC	BAC	CAB
ACB	BCA	CBA

En total tenemos 6 ordenamientos distintos para la posición en que se pueden sentar los amigos si lo hacen de forma lineal, esto corresponde a una permutación de 3 elementos, quedando: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Hagamos ahora todas las representaciones de los ordenamientos posibles, si los amigos se sientan en forma circular alrededor de la fogata:



¿Por qué no podemos usar la siguiente representación como posible ordenamiento?



Si bien los amigos se encuentran en distinta posición, nos podemos dar cuenta que es una rotación de la primera representación, pues el amigo "C" sigue estando sentado a la izquierda de "A" y a la derecha de "B" como en el primer ordenamiento. Así entonces todos los demás posibles ordenamientos no son más que rotaciones de las representaciones anteriores.

Por lo que, si respondemos la pregunta inicial, tenemos solo dos posibles ordenamientos distintos para sentarse alrededor de la fogata. **¿Cómo podemos expresar este resultado como una permutación donde se use ocupe un número factorial?**

De acuerdo al resultado obtenido, debemos ver qué número factorial es igual a dos. el único número factorial que da este resultado es **2!**, si lo expresamos como una permutación no podemos usar $n = 3$, puesto que la permutación de tres elementos da un total de 6, así entonces usaremos una permutación de 2 elementos, $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$



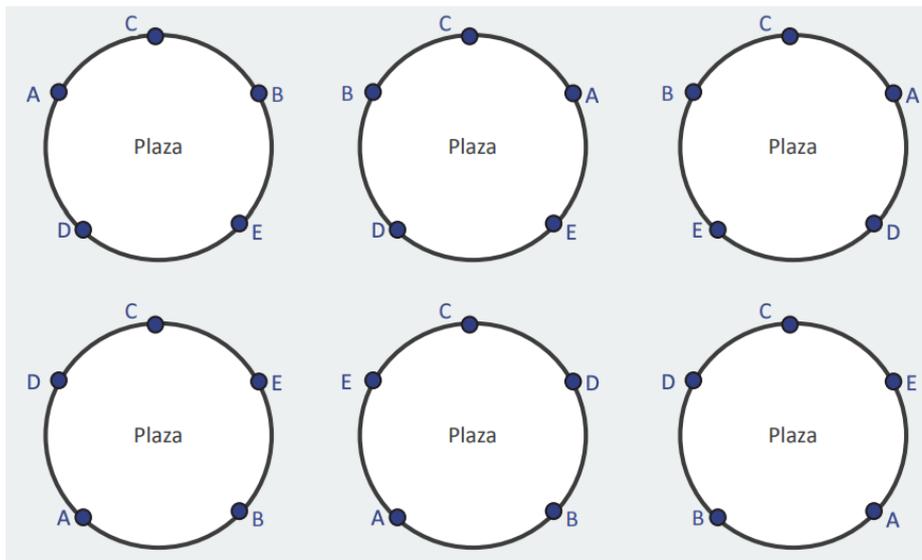
Veamos otra situación:

Una banda instrumental de 5 jóvenes, se presentará en la plaza de la ciudad para dar un concierto, el director no sabe si ordenarlos de forma lineal o circular por la acústica de los instrumentos, si tuvieras que ayudarlo y decirle la cantidad de formas totales que tiene para ordenar a sus músicos de ambas formas **¿Cuántos ordenamientos tendrá de cada forma?**

Ya sabemos que una permutación lineal de 5 elementos, se calcula:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Veamos las representaciones de forma circular, para saber el total de ordenamientos posibles:



Tenemos 6 representaciones, pues si hacemos los mismos ordenamientos en donde está la “C” por las cuatro letras restantes, tendríamos entonces 6 por 4 posibles ordenamientos distintos para posicionar a los músicos en la plaza. **¿Cómo podemos expresar este resultado como una permutación donde se use ocupe un número factorial?**

De acuerdo al resultado obtenido, debemos ver qué número factorial es igual a 24. El único número factorial que da este resultado es 4! Si lo expresamos como una permutación no podemos usar $n = 5$, puesto que la permutación de cinco elementos da un total de 120, así entonces usaremos una permutación de 4 elementos, $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

En ambas situaciones podemos ver que, si el total de elementos es “n”, en una permutación circular, para calcular el total de ordenamientos usamos un elemento menos, es decir, si una permutación circular tiene “n” elementos usaremos para su cálculo “(n – 1)” elementos.

En ambas situaciones podemos ver que, si el total de elementos es “n”, en una permutación circular, para calcular el total de ordenamientos usamos un elemento menos, es decir, si una permutación circular tiene “n” elementos usaremos para su cálculo “(n – 1)” elementos.

$$PC_n = (n - 1)!$$



13

OA11

En la biblioteca de una universidad se sientan 4 compañeros en una mesa circular para estudiar Biología. ¿De cuantas formas distintas se pueden sentar?

- a) 4
- b) 24
- c) 12
- d) 6

14

OA11

¿Cuál es la diferencia numérica entre el total de formas distintas que se pueden sentar 6 personas en una fila y el total de formas distintas que se pueden sentar 6 personas en una mesa circular?

- a) 720
- b) 600
- c) 120
- d) 4920

15

OA11

¿Cuántas formas más en total tienen 4 personas de sentarse en línea en un auto que 4 que se sientan en un carrusel?

- a) 18
- b) 12
- c) 6
- d) 8

Ahora veremos que existen otras técnicas de conteo, que cumplen con condiciones distintas a las permutaciones y que se aplican en ciertos contextos. Para poder diferenciar una de otra, analicemos la siguiente situación:



En un campeonato de tenis de mesa que organiza el centro de alumnos de un establecimiento, se crean dos grupos de 4 cursos. Solo pasan a semifinal del campeonato los dos primeros lugares de cada grupo. Luego, se juega la clasificación para disputar la final y el que pierde se va a la disputa el tercer lugar. La siguiente tabla muestra los cursos sorteados para cada grupo.

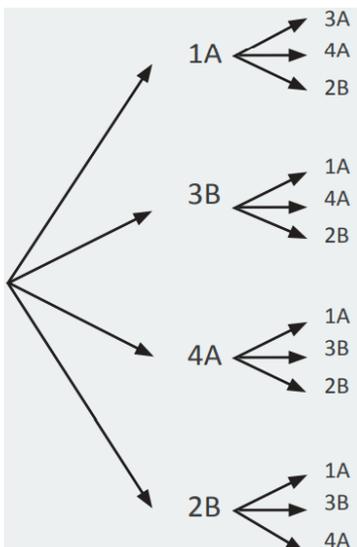
Grupo A	Grupo B
1A	2A
3B	1B
4A	3A
2B	4B

1. ¿De cuantas formas distintas se puede ordenar el grupo A?

Como se quieren ordenar todos los elementos, usaremos el concepto de permutación sin repetición: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas distintas, sin repetir los cursos o que falte alguno.

2. De cada grupo clasifican los dos primeros cursos a semifinal. Según estas posiciones se define el orden de los partidos, por tanto, es importante el lugar en que clasifican. En el grupo A, ¿qué ordenamientos posibles hay para los dos primeros lugares?

Hagamos una representación por medio de un diagrama de árbol para ver todas las posibles clasificaciones de los cursos del grupo A.



Si contamos todas las posibles clasificaciones, teniendo en cuenta que la primera flecha corresponde al clasificado en primer lugar y la segunda al que lo hace en segunda posición, tenemos un total de 12. Esto corresponde a la mitad de ordenamientos que había en un principio, lo que podemos expresar de la siguiente forma:

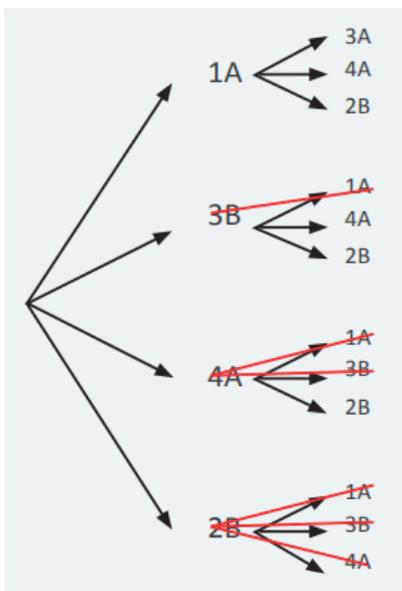
$$\frac{4!}{2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$



3. Supongamos que, una que vez que clasifican los dos primeros lugares de cada equipo, se realiza un sorteo para definir los rivales, de modo que en el orden en que clasificaron a la semifinal no es importante. ¿Cuántas clasificaciones distintas pudieron haber existido en el grupo A?

Como el orden en que clasifican los cursos a la semifinal no es relevante, es decir, da igual si clasifica el 1A en primer lugar y luego el 3B en segundo lugar que el 3B en el primer lugar y el 1A en el segundo puesto, lo que importa es qué cursos clasifican y no el lugar.

Revisemos el diagrama de árbol que teníamos anteriormente, para descartar aquellos ordenamientos que son iguales, teniendo en cuenta que no se considera el lugar de clasificación.



Si contamos en total todos los posibles clasificados sin importar su orden de ingreso, tendríamos un total de 6 posibles clasificaciones a semifinal, es decir, la cuarta parte de los clasificados que había en un principio cuando se tomaban todos los cursos. Esto podemos calcularlo como:

$$\frac{4!}{2} = \frac{4!}{2 \cdot 2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2} = 6$$

Al analizar la cantidad de total de posibles clasificados cuando el lugar si era importante con la cantidad de clasificados cuando el orden no importaba, podemos apreciar que existe mayor cantidad de ordenamientos en la primera condición, pues debemos tener en cuenta que si un curso clasifica en primer lugar o en segundo lugar no es lo mismo. En cambio, cuando solo interesa el curso que clasifica sin importar en qué lugar, podemos ver que, si un curso clasifica primero o después, da igual, pues importa que clasifique.

Con este análisis podemos dar paso a dos nuevas técnicas de conteo. Definiremos en primer lugar a la variación y luego a la combinación.



Variaciones

Se llama variación de k elementos escogidos entre n y se denomina V_k^n a la cantidad de ordenamientos posibles de k elementos, escogidos entre n .

- Una variación **sin repetición** se calcula como:
- Una variación **con repetición** se calcula como:

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$Vr_k^n = n^k$$

Por ejemplo:

Calcular cuántos números de dos dígitos se pueden formar utilizando las tarjetas: 4, 5 y 7.

- Sin repetición:

Los números que se pueden formar son: 45 – 47 – 54 – 57 – 74 – 75

El resultado anterior se puede comprobar mediante la fórmula. En este caso, $n = 3$ y $m = 2$,

y además los números no se pueden repetir, se obtiene: $V_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$

- Con repetición:

Los números que se pueden formar son: 44 – 45 – 47 – 54 – 55 – 57 – 74 – 75 – 77

El resultado anterior se puede comprobar mediante la fórmula. En este caso, $n = 3$ y $m = 2$,

y además los números no se pueden repetir, se obtiene: $Vr_2^3 = 3^2 = 9$

Una característica fundamental de las variaciones es que siempre importa el orden en que se seleccionen elementos.

16

OA11

Para la directiva de un curso, hay 5 estudiantes postulando a los cargos de presidente, secretario y tesorero. ¿De cuántas formas distintas se pueden adjudicar los puestos?

- A) 20
- B) 30
- C) 60
- D) 120

* Es importante tener en cuenta que del total de los 5 estudiantes solo 3 de ellos podrán ser parte de un puesto en la directiva y además tener en cuenta que no es lo mismo que un estudiante sea el presidente que el tesorero o el secretario, por lo que el orden es importante.



Combinaciones

Se llama combinación de k elementos escogidos entre n a la cantidad de posibilidades que hay de escoger k elementos distintos de un total de n , sin que importe el orden en que son escogidos. Para el caso sin reposición, la cantidad total de combinaciones se escribe como C_k^n , y se puede calcular como:

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Cuando una combinación se realiza con reposición de elementos, se debe utilizar la expresión:

$$C_r^n = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$$

Por ejemplo, en un taller de tejidos, hay 4 colores de lana: blanco (B), azul (A), rosado (R) y verde (V). Si cada asistente debe elegir 3 colores diferentes para confeccionar una bufanda, ¿cuántas elecciones puede realizar?

Identificamos los datos, $n = 4$ (4 opciones posibles), $k = 3$ (3 son seleccionadas) y que cada asistente debe escoger colores diferentes (sin repetición), al reemplazar en la expresión, se obtiene:

$$C_3^4 = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{6} = 4$$

La expresión $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ suele escribirse como $\binom{n}{k}$ -que se lee "n sobre k"- y recibe el nombre de número combinatorio. Algunas propiedades de los números combinatorios son:

- Cualquier número sobre 0 es igual a 1
- Todo número sobre sí mismo es igual a 1.
- Un número sobre 1 siempre es igual al número.

17

OA11

Una profesora tiene que elegir 5 niños para que la acompañen a comprar materiales para el curso. Si hay 7 niños en total, ¿cuántos grupos distintos puede hacer?

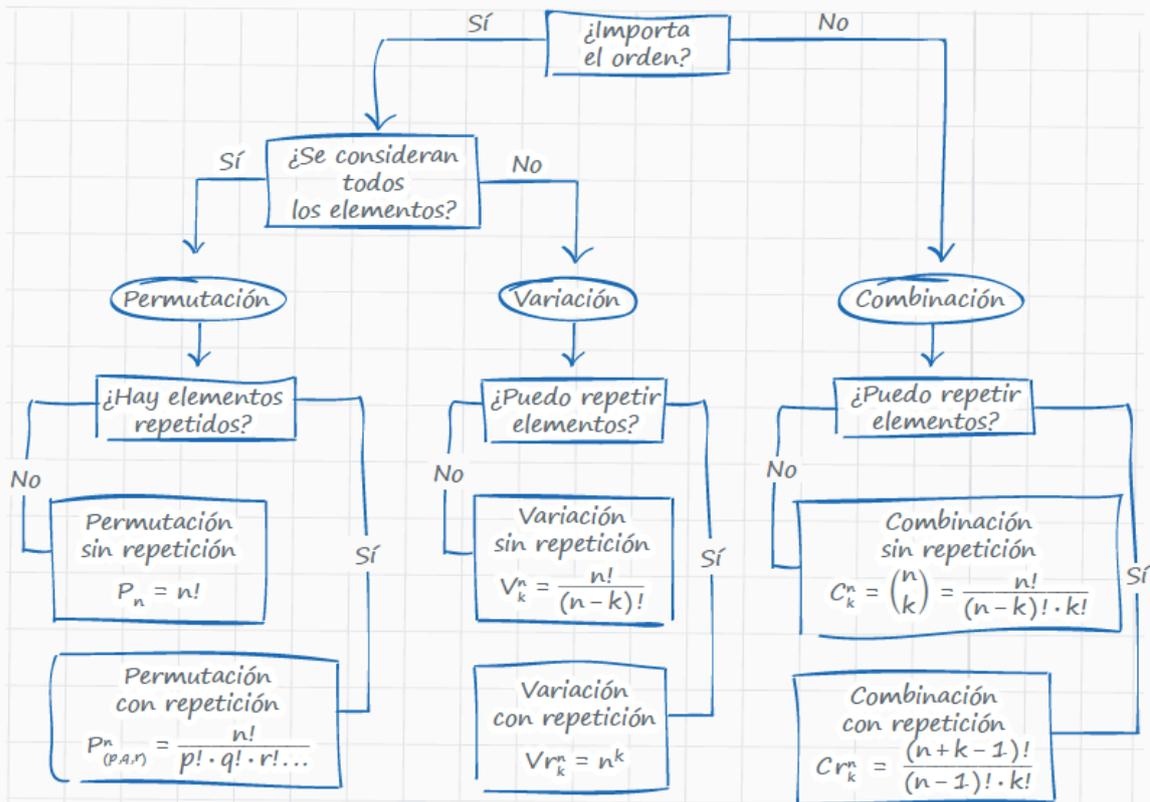
- A) 2
- B) 21
- C) 42
- D) 240

* Es importante tener en cuenta que no se toman todos los elementos del total, es decir, de los 7 solo seleccionará a 5 de ellos para que la acompañen a comprar, además el dato que marca una diferencia con el ejemplo anterior, es que aquí no importa el orden en que salen elegidos los estudiantes



Resumen

De acuerdo con las características de un problema, puedes saber si corresponde a un caso de permutaciones, variaciones o combinaciones, utilizando el siguiente esquema:



Instrucciones: Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

18

OA11

¿Cuántas palabras de 3 letras se pueden crear con las letras de la palabra PELOS?

- A) 120
- B) 24
- C) 60
- D) 24



19

OA11

¿Cuál (es) de las siguientes afirmaciones es (son) correcta(s)?

- I. En la permutación se ocupan todos los elementos.
- II. En la combinación es importante el orden de los elementos.
- III. En la variación es importante el orden de los elementos.

- A) Solo II
- B) Solo I y III
- C) Solo I y II
- D) Solo III

20

OA11

¿De cuántas formas posibles se pueden escoger 4 atletas de un total de 6 para un campeonato mundial de atletismo?

- A) 30
- B) 15
- C) 120
- D) 360

21

OA11

En una salida a terreno, una profesora va con 8 estudiantes a visitar una reserva nacional. El guardaparques le indica a la profesora que para hacer el recorrido principal lo deben hacer en grupos de 4 estudiantes. Entonces, ¿de cuántas formas distintas pueden hacerlo?

- A) 10
- B) 14
- C) 32
- D) 70